LA MATHÉMATIQUE

LES MATHÉMATIQUES

LA MATHÉMATIQUE MODERNE

M.-L. GUERARD DES LAURIERS

la mathématique
les mathématiques
la mathématique moderne

DOIN, Editeurs
8, Place de l'Odéon - Paris 6

Cette étude a été publiée par la Revue Itinéraires *(numéro 156 - sept.-oct. 1971) ; elle est reproduite, avec quelques modifications, en accord avec le Directeur de la Revue.*

Introduction

L'homme moderne entend être au courant de tout. A tort ou à raison ? Laissons de côté cette question. Cette exigence collective impose en fait à chacun d'être informé, en vue de pouvoir, éventuellement, juger. Nous proposons, dans les pages qui suivent, une triangulation des questions soulevées par la « mathématique moderne » telles que nous les comprenons.

Le vocabulaire est généralement indicatif de la pensée, c'est de lui que nous partirons. Nous examinerons ensuite les questions qui sont en substance celles de toujours ; elles concernent respectivement, pour toute chose et pour les mathématiques en particulier, la finalité, la nature, la communication. Nous laisserons au lecteur le soin de conclure, s'il le veut, *pour* ou *contre* « la mathématique moderne ». Celle-ci, pour autant qu'elle soit expressive d'une tendance nouvelle, constitue un achèvement, si on se place formellement au point de vue théorétique qu'a toujours impliqué la mathématique ; par contre, qu'on le veuille ou non, cette même tendance a en fait pour conséquence d'accroitre, fort dangereusement à tous égards, l'opposition qui a toujours existé entre les proliférations du constructionisme mental et la saine appréhension de la réalité.

La locution « mathématique(s) moderne(s) », c'est-à-dire plus précisément l'épithète « moderne », est en fait récusée par la quasi unanimité des auteurs qui exposent les mathématiques d'une manière moderne, et des chercheurs à qui il revient de faire la mathématique et de la faire par conséquent moderne[1].

(1) Citons entre autres :

« Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques. » ([6], 5.)

Le chiffre entre crochets renvoie à la liste bibliographique qui figure p. 179 de l'étude. Le second chiffre, séparé par une virgule

Il ne faut cependant pas se méprendre sur la portée véritable de cette unanimité, plus apparente que réelle. En usant de l'épithète « moderne » on entend caractériser deux choses à la fois différentes et connexes qu'on oppose, confusément en fait parce que globalement, à ce qui n'est pas « moderne ».

Sont « modernes » certaines théories auxquelles se trouve accordée *actuellement* la prévalence, au détriment d'autres théories qui ne sont plus *actuellement* considérées et qui par le fait même ne sont pas, au moins provisoirement, « modernes ». M. J.-P. Serre, tout en rappelant à fort juste titre que « la mathématique est une science continue », accepterait évidemment le mot « moderne » pris en ce sens.

Est « moderne » une certaine manière de présenter des théories ou des questions qui ont toujours été enseignées et qui ne cessent pas de l'être. De cela seraient non moins évidemment d'accord les fort nombreux auteurs qui sont partisans de ce nouveau mode de présentation, bien qu'ils désavouent le mot « moderne ».

Cette question de vocabulaire est, croyons-nous, l'indice d'une opposition entre deux points de vue contraires.

Les réformateurs savants acceptent le contenu du mot « moderne », tout le contenu : et cela fort logiquement, puisque le mode de présentation « nouveau » est lié organiquement aux théories dont la prévalence, sinon la substance, est « nouvelle » ; tout ce « nouveau » est actuel, moderne. Mais ils refusent spontanément l'épithète « moderne », en vertu même de la précision dont ils se font les protagonistes.

à gauche, indique le numéro de la page. Ainsi ([5], 5) signifie « Charte de Chambéry, page 5 ».

« Ne parlons pas de « mathématique moderne » mais d'un aspect moderne des mathématiques élémentaires. » (L. Félix, [2], 88.)

« Il est aujourd'hui trop tard, ou trop tôt, pour éliminer le qualificatif de « moderne » utilisé pour caractériser l'état actuel des mathématiques. Ce terme qui évoque fâcheusement le « modern style » vite précipité dans les enfers du démodé, ou en mathématiques mêmes, certaine géométrie moderne, qui n'a rien perdu de sa beauté mais est restée ce qu'elle a toujours été... » ([13], 17.)

« Il n'y a ni mathématiques traditionnelles ni mathématiques modernes. La mathématique est une science continue. » (M. Jean-Pierre Serre.)

L'épithète « moderne » a été introduite pour la première fois par Van Den Waerden : « Modern Algebra ».

« Moderne » recouvre en effet deux équivoques.

La première est celle qu'on vient de rappeler : autre est la réalité (mathématique), autre le mode de sa présentation, bien que l'un et l'autre puisse être « moderne ».

La seconde équivoque consiste en ce que ceux à qui est proposée la « mathématique moderne » ne manquent pas d'attribuer au mot « moderne » une portée différente de celle qu'il a en réalité. « La mathématique moderne » est présentée, en maints ouvrages ou libelles scolaires, *comme n'étant pas* « les mathématiques de papa ». Celles-ci sont remplacées, et pour autant exclues, par celle-là. Tandis que, en vérité, « la mathématique est une science continue ». Cette méprise, à laquelle donne lieu l'épithète « moderne », est d'ailleurs d'autant plus insidieuse et d'autant plus nocive que la pensée contemporaine doit à l'historicisme d'avoir pour instrument dialectique l'opposition de contradiction, et pour principe d'organisation le progrès évolutif. Ce qui vient après abolit ce qui le précède, et vaut mieux que lui. « Posterior, ergo melior. » La mathématique moderne ne peut qu'être, parce que « moderne », supérieure à celle qu'elle remplace.

« Gonfler » est aussi malséant que « décrier », surtout lorsqu'il s'agit de science. On comprend donc que les réformateurs savants soient défavorables à l'épithète « moderne », bien qu'ils s'y rallient, au moins provisoirement.

Les réformateurs commerçants — il y en a — manifestent par leur comportement que leur point de vue est exactement à l'opposé de celui des réformateurs savants. Ils tiennent fort au *mot* « moderne », quoi qu'il en soit du rapport que celui-ci soutient avec la réalité. Nous ne croyons pas opportun d'insister.

Les réformateurs pédagogues sont légion, par force. Et, encore assez souvent malgré de récents désenchantements, par conviction. Nombre d'entre eux, surtout dans l'enseignement du second degré, se tournent vers les « réformateurs savants », ou le sont eux-mêmes. Quelques-uns, faut-il le dire, ne laissent pas d'être des « commerçants », usant de la pédagogie comme d'un truchement. Mais la très grande majorité, notamment dans l'enseignement du premier degré, demeurent en suspens ou s'efforcent vaille que vaille, sans comprendre ni ce que le mot « moderne » au juste signifie, ni objectivement de quoi il s'agit. On ne saurait méconnaître l'importance de cet aspect pra-

tique de la réforme introduite dans l'enseignement des mathématiques. Les possibilités réelles de l'application commanderont en effet, on peut le supposer, soit l'achèvement du plan prévu soit son ajournement. Mais il est difficile de donner un bilan à la fois objectif et général, car les grandes revues d'information au point de vue pédagogique ne présentent guère que les expériences réussies.

Nous nous plaçons, dans cet article, ou du moins le tentons-nous, au point de vue des réformateurs savants. Ils ne laissent pas, d'ailleurs, d'être fort avertis de tout ce qui concerne la pédagogie.

Nous pourrons donc nous conformer à l'usage courant sans pour autant manquer à la vérité. La locution « mathématique moderne », pourvu qu'elle ne consignifie pas l'éviction des « mathématiques traditionnelles »[2], est doublement fondée. Primordialement « ex parte objecti », en ce sens que l'attention se porte préférentiellement sur les structures, lesquelles se retrouvent analogiquement les mêmes en des entités (mathématiques) différentes, plutôt que sur la concrétude propre de chacune de ces entités[3]. Secondairement, et par voie de conséquence, « ex parte communicationis », en ce sens que les différentes branches des mathématiques (traditionnelles ou nouvelles) sont exposées en employant des algorithmes qui ont la même structure, bien que les symboles figurant dans ces algorithmes paraissent avoir des significations différentes, chacune de celles-ci correspondant à telle branche ou à telle théorie.

Ajoutons qu'au point de vue de l'épistémologie générale, il est judicieux d'attribuer une dénomination propre à une réalité suffisamment caractérisée. Or choisir un point de vue, en excluant donc en fait d'autres points de vue possibles, et cela

(2) « Ce qui était une démonstration pour Euclide, est une démonstration pour nous. » (Bourbaki, repris par Revuz [13], 18.)

(3) « Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques. » ([5], 5.)

« Il faut ici faire un sort à l'expression « mathématiques modernes » qui connait un trop grand succès (si bien que pour les observateurs superficiels, il n'y aurait dans ce « modernisme » qu'une mode... ; dans ce rapport, l'expression « la mathématique des structures » remplacera celle de « mathématiques modernes » ... » (Gilbert Walusinski ([1], 33.)

Pareillement, Madame Robert ([3], 15.)

en vue de mieux atteindre un certain type de résultat, c'est bien, dans l'ordre intelligible, circonscrire une réalité qui par le fait même se trouve déterminée. Une telle opération mérite une dénomination propre : cette dénomination étant attribuée soit à l'opération elle-même soit à son résultat.

Or tel est bien le cas pour « la mathématique moderne ». Elle ne prétend à rien de moins en effet que réaliser l'unité de toutes les mathématiques en discernant, dans les différentes branches, les structures identiques immanentes à des entités qui sont par le fait même semblables entre elles. Elle mérite donc d'être désignée par un vocable propre.

L'entreprise « mathématique moderne » est-elle possible ? Si on la commence, est-il possible de la poursuivre sans rencontrer de graves écueils ? On peut, nous le verrons, en discuter. Mais il y a deux choses qu'on ne peut contester.

Premièrement, que ce propos ne soit légitime, et que même il ne s'impose : car tout savoir tend, en vertu de la nature même du savoir, à trouver, dans l'unité, un achèvement et une confirmation qui lui soient propres ; reste à examiner si une telle unité peut être réalisée au sein d'un savoir particulier ?

Deuxièmement, on ne peut non plus contester que le « bourbakisme »[4] ne soit une réussite, si on le considère au point de vue qui l'a inspiré. Mais cela n'entraine évidemment pas que ce point de vue soit absolu, ni par conséquent qu'il soit légitime d'imposer, comme on cherche à le faire actuellement, une pédagogie et des programmes qui ne peuvent se justifier qu'en fonction de ce point de vue.

On voit donc que les questions posées par l'existence de la mathématique moderne constituent au vrai une radicale remise en question des fondements et des aboutissants du savoir mathématique.

Cette remise en question est légitime, puisqu'elle est la condition d'une unification désirable, mais elle ne pourrait aboutir qu'à une déception, si on prétendait, soit en droit soit

(4) « Bourbaki » est un pseudonyme : signature anonyme derrière laquelle se sont dissimulés les « bourbakistes » de la première heure. Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, André Weil ont formé, vers 1930, le projet d'axiomatiser toute la mathématique. Les premiers fascicules ont paru en 1939 ; et le projet est maintenant en voie d'achèvement, principalement en ce sens que les mathématiques tendent à employer le mode de présentation dont le Bourbaki a fixé les normes.

en fait, en affirmant ou en insinuant l'auto-suffisance de la mathématique, que cette « remise en question » constitue une « résolution ». C'est cela que nous nous proposons d'expliquer.

Nous le ferons, non à partir de principes posés a priori, mais en analysant les passages les plus typiques des traités de mathématique moderne qui jouissent d'une large audience. Se retrouvent posées, dans ces traités même techniques, soit explicitement soit indirectement, les questions de toujours. Quelle est la finalité des mathématiques ? Quels en sont les fondements ? Ce qui requiert d'avoir précisé quelle en est la nature ? Et enfin, puisque l'introduction du « moderne » a partie liée avec la réforme de l'enseignement, quelles méthodes doivent être de préférence employées en vue de promouvoir le développement de la mathématique, conformément à la nature et à la finalité qui lui sont propres ? Nous exposerons aussi objectivement que possible, pour chacun de ces trois aspects, l'argument des « réformateurs savants » ; nous présenterons ensuite des réflexions critiques qui, nous l'espérons, contribueront à éclairer le lecteur désireux de juger personnellement.

Nous précisons enfin que nous ne ferons pas directement état, dans cette étude, du « Bourbaki savant », c'est-à-dire du traité technique dont les premiers fascicules ont paru en 1939. Et cela pour deux raisons.

La première est que, dans ce traité technique, la question qui va nous occuper n'est pas même examinée. Qui plus est, elle se trouve écartée. Il est en effet expressément déclaré, et souvent répété, que si le sens d'une notion n'est pas défini axiomatiquement, ce sens est le « sens usuel ». D'où il résulte que, si l'existence d'un rapport entre la définition axiomatique et le « sens usuel » d'une même notion n'est pas niée, jamais un tel rapport n'est présenté comme devant être examiné. Les auteurs des exposés élémentaires sont au contraire contraints d'aborder cette question, laquelle est en substance celle que nous nous proposons d'étudier.

La seconde raison découle de la première. Quelle est la nature du rapport qui existe entre une définition axiomatique et la notion usuelle à laquelle elle est censée correspondre ? Cette question affleure constamment dans le « Bourbaki savant » ; elle affleure pour ainsi dire objectivement, en raison de la démarche elle-même, et partant inéluctablement. Mais comme elle n'est jamais explicitement posée, il faudrait, pour simplement la dégager, des analyses si minutieuses et si longues que celles-ci ne pourraient rentrer dans le cadre d'une étude dont l'objet essentiel intéresse un public non spécialisé.

1. La remise en question de la finalité des mathématiques.

1. La finalité du savoir et de l'acte du connaître.

La science est immédiatement ordonnée au savoir, comme la disposition l'est à l'acte. Si donc on demande « Pourquoi la science ? », la question concerne en réalité l'acte de connaitre et partant celui de savoir. Pourquoi l'homme cherche-t-il à exercer cet acte ?

Il y a toujours eu, et il y a encore, typiquement, deux sortes de réponses, selon que l'on réfère l'acte de connaitre à une fin qui en est distincte, ou bien que l'on croit discerner, au sein de l'acte de savoir, une justification qui lui serait immanente.

La finalité de l'acte de connaitre, supposé qu'elle en soit distincte, ressortit évidemment à l'homme qui exerce cet acte. Elle peut donc être, par nature, soit spirituelle soit sensible [5].

(5) Cette dichotomie concerne la nature considérée au point de vue abstrait. Nous ne faisons que rappeler le schéma d'une catégorisation. Il est évident que, dans chaque cas concret, la finalité humaine intègre simultanément le spirituel et le sensible, selon un ordre cependant.

Si cette finalité est de nature spirituelle, l'acte de connaître se trouve justifié en tant qu'il est partie intégrante d'un acte de contemplation, celui-ci ayant pour *objet* une *réalité* transcendante, dans la fruition de laquelle l'homme trouve sa béatitude. Si cette finalité, supposée extrinsèque à l'acte de connaître, est de nature sensible, elle concerne en définitive l' « utile ». L'acte de connaître est alors justifié par le pouvoir qu'il confère sur la matière ; autrement dit, il est comme un capital, convertible en néguentropie et par là même en efficacité.

Si la finalité de l'acte de savoir est supposée lui être immanente, elle appartient par le fait même au sujet d'où procède cet acte, ce sujet étant considéré soit en tant qu'il exerce l'acte soit en tant qu'il atteint la perfection de sa nature dans l'acte achevé. L'un et l'autre a été soutenu, et même vécu. L'*acte* de contemplation (naturelle) est, selon Aristote, ce en quoi consiste la béatitude de l'homme [6]. En retour, l'activité théorétique, art ou science, a toujours été considérée comme faisant honneur à l'esprit humain, et M. André Weil par exemple estime que c'est là une justification suffisante.

(6) Insistons en passant sur la différence essentielle qui existe entre les deux activités théorétiques, qui correspondent respectivement à la contemplation surnaturelle de Dieu et à la contemplation naturelle du *même* Dieu. C'est bien le même Dieu ; mais lorsque la Réalité transcendante n'est atteinte que comme le corrélat nécessaire d'une réalité créée, l'esprit ne peut être fixé par cette Réalité qui n'est réelle pour lui que dans la mesure où il tend vers elle. Tandis que l'esprit est fixé par Dieu vers qui il tend en exerçant l'acte de croire, parce que l'indispensable médiation de la Parole révélée procède alors en réalité de Dieu Lui-Même et non du créé. Ainsi, il existe bien une contemplation naturelle, et plus généralement une religion naturelle ; le méconnaître n'exalte pas le « surnaturel » mais prive celui-ci d'un irremplaçable enracinement. En retour, ce serait une insidieuse et nocive erreur que de chercher à découvrir dans une contemplation naturelle, si évoluée soit-elle, l'équivalent ou le substitut de la contemplation surnaturelle. C'est la structure de l'acte intelligible qui est différente dans les deux cas et les rend irréductibles l'un à l'autre, quoi qu'il en soit d'ailleurs des données affectives et volontaires dont la considération fonde, à elle seule, la même conclusion.

2. La finalité de la mathématique moderne telle qu'elle est avouée.

Cette rapide triangulation était nécessaire pour situer avec exactitude la « finalité », ou selon le vocabulaire de la psychologie qui se place au point de vue du sujet, la « motivation », de la mathématique moderne. On observe en effet que les raisons alléguées en faveur de la « réforme » sont celles qui toujours ont été données pour justifier l'acte de connaître et de savoir.

L' « utile » est mentionné par tous les auteurs qui traitent de la question ([5], 5-8). L'économie de demain sera, de plus en plus, à base de techniques ; or les techniques sont immédiatement spécifiées par des situations, plutôt qu'elles ne se réfèrent à des questions d'ordre théorique ([13], 61) ; cela exige à l'échelle mondiale, on y insiste, de mettre en œuvre d'une manière nouvelle, et par conséquent de comprendre d'une manière nouvelle, la mathématique.

L'existence d'une finalité immanente à l'acte de l'esprit est également « retrouvée », selon sa double valence. M. R. Skemp par exemple ([1], 83), se défend de traiter la question « trop complexe et trop délicate de la motivation des travaux scolaires en général » ; mais il affirme, d'après son expérience, la « validité » de deux motivations : « celle de l'apprentissage par cœur et celle de l'apprentissage schématique ». « L'apprentissage par cœur a lieu parce que certains actes sont suivis de résultats favorables — satisfaction d'un besoin, réduction d'une tension, suppression de l'anxiété, etc... Autrement dit, les actes ne sont pas appris pour eux-mêmes, mais parce qu'ils conduisent à des résultats qui ont une valeur pour l'organisme... J'ai acquis la ferme conviction que les enfants jugeaient [l'apprentissage schématique] valable en lui-même, indépendamment du but auquel il pourrait conduire. En fait, les expériences proposées aux enfants n'avaient aucun but pour eux. Les collègues et les étudiants auxquels je montrais les schèmes artificiels se met-

taient à jouer avec, pour leur propre amusement... Cela signifie que le système perfectionné de contraintes extérieures (notes, examen, classement)... risque de faire plus de mal que de bien, s'il s'oppose à l'acquisition des capacités mathématiques considérée comme une fin agréable en soi. » Ainsi, l'acte de la connaissance mathématique est justifié, au regard du réformateur savant psychologue, soit parce qu'il concourt à la perfection du sujet soit par la joie qu'en procure l'exercice. L' « apprentissage par cœur » et l' « apprentissage schématique » correspondent, dans un cas particulier, aux normes générales de l'épistémologie.

Les mathématiciens, plus intéressés par leur science que par la pédagogie, insistent sur l' « acte », ou équivalemment sur la « créativité ».

« Tout devant être fait pour favoriser recrutement et formation des scientifiques » ([5], 13). « On accuse aussi les réformateurs de ne penser qu'à former de futurs mathématiciens ; le reproche est plaisant, car qui, en dehors des futurs mathématiciens, arrivait à émerger de l'enseignement traditionnel et à retrouver le vivant et le sain derrière le fatras mort ? » ([13], 61). « Il s'agit d'enseigner cette manière de penser [mathématique] sans la mutiler, sans la réduire à son seul aspect déductif, sans brimer l'imagination » ([13], 65). Maints autres passages expriment la même chose : la « réforme » vise, comme son but le plus noble, l'épanouissement de l'activité créatrice dans le domaine mathématique.

Or si on demande « pourquoi créer ? », on doit évidemment considérer que l'acte créateur consiste en une sorte d'émergence de la nature intelligible dans le sujet qui la porte en lui-même, et à laquelle il se rend docile en écartant spontanément les possibilités d'inférence qui seraient sans issue. La finalité de l'acte créateur est donc celle d'une opération de nature. C'est, d'une part, la perfection qui mesure cette nature, c'est en l'occurrence l' « honneur de l'esprit humain » ; et c'est d'autre part la joie qui accompagne l'exercice de toute opération de nature [7], c'est la joie du jeu, re-création des enfants et même des adultes, comme la création est le jeu des génies.

(7) La joie est conscience d'être. Et, pour l'être intelligent, connaître c'est cela qui est être. Il y a une joie propre de connaître. Cette joie culmine dans l'acte de découverte, car l'unité propre au connaître, entre le connu et le connaissant, est alors plus intime à l'esprit et par le fait même sur-consciente.

On voit donc que la mathématique moderne ne fait que retrouver des principes fort simples et fort connus. Certains réformateurs en sont d'ailleurs parfaitement conscients ; ils le reconnaissent il est vrai en se plaçant au point de vue du développement formel de la mathématique ([13], 64) ; mais ils le reconnaitraient également au point de vue, tout proche du leur, de la finalité : le ton de leurs propos autorise à le présumer.

Nous n'entendons pas, en faisant cette observation, déprécier la mathématique moderne. Bien au contraire. Retrouver le simple constitue en effet, en quelque domaine que ce soit, le plus précieux des appoints, et requiert en général un rude labeur. On ne peut donc qu'être partisan de la « réforme », dans la mesure toutefois où les résultats qu'on en escompte peuvent devenir effectifs, dans la mesure surtout où celles des données primitives qu'elle permet de redécouvrir ou de mieux comprendre ne risquent pas de faire obstacle, à cause du mode de présentation adopté, à la mise en œuvre d'autres données qui, absolument, sont encore plus primitives et partant plus importantes. Présentons, sur ce point, quelques observations.

3. La finalité de la mathématique telle qu'elle est en droit.

La finalité, ou concrètement « la fin », constitue, en toute réalité en devenir, le principe de l'ordre et partant le principe de l'unité. La finalité est donc *une*, en droit et par nature.

Il s'ensuit qu'une réalité particulière, c'est-à-dire une partie d'un tout, ne peut, comme telle, ni avoir en elle-même, ni s'assigner à elle-même et par elle-même, sa propre fin ; il en résulterait en effet une pluralité pour la finalité du tout dans lequel cette partie se trouve intégrée.

Il s'ensuit également qu'une réalité particulière, du fait qu'elle peut concourir de plusieurs manières formellement dis-

tinctes à réaliser *la* fin, laquelle est simultanément celle du tout et celle de cette réalité particulière, une telle réalité donc peut avoir plusieurs finalités différentes, lesquelles sont évidemment sub-ordonnées à *la* fin. Ainsi, l'impossibilité d'avoir en soi sa propre fin s'accompagne normalement, pour telle réalité particulière, d'une pluriflcation de la finalité propre, cette finalité propre ne laissant cependant pas d'être « une » parce que chacune des composantes en est sub-ordonnée à *la* fin.

L'expérience montre que ces principes fort simples sont d'application universelle.

On n'est donc pas surpris que la finalité du connaitre, et plus précisément celle de la science et des mathématiques, soit double, c'est-à-dire théorétique et pratique, et que même elle puisse se complexifier encore davantage. C'est simplement l'indice de ce que le connaitre, et même la mathématique fût-elle moderne, n'a pas sa fin en soi.

Dès lors, quelle est, en l'occurrence, la fin ? C'est là une question véritable, tous en conviennent en fait. La preuve en est que chacun y répond, mais en prétendant imposer comme étant *la* fin une finalité qui correspond à un point de vue particulier.

Ainsi, la mathématique serait justifiée par le service de la technique, et le développement accéléré de celle-ci devrait impérer le même rythme pour la diffusion de celle-là. Or, qu'on le veuille ou non, ce processus conduit inéluctablement à la technocratie. C'est-à-dire qu'en fait la fin réellement poursuivie sera l'économie : l'homme sera asservi par ce qui, en droit, doit le servir. C'est donc, en réalité, une certaine manière de concevoir les conditions de la vie humaine et partant l'homme lui-même qui est sous-jacente à la réforme de l'enseignement mathématique. Si on y prenait garde, si on posait d'une manière réaliste la question de la finalité, l'inconvénient pourrait être diminué sinon évité. Et nous disons « inconvénient » car, faut-il le préciser, nous estimons aberrante la manière de concevoir les conditions de vie qu'implique, pour l'homme, la technocratie.

Ainsi également, la « réforme » serait justifiée par le fait de favoriser la formation de futurs mathématiciens ([13], 61). Mais cette finalité, parfaitement légitime si elle est sub-ordonnée, demeure non consistante si on ne précise pas quelle est *la* fin à laquelle est ordonnée la formation des futurs mathématiciens, c'est-à-dire en définitive la fin à laquelle est ordonnée la mathématique. Et puisqu'en l'occurrence, les réformateurs se placent au point de vue théorétique, on peut et on doit se demander

quelle est la finalité de cette « theoria », ou de cet art, ou de cette contemplation, qu'est la mathématique.

On retrouve alors inéluctablement la dichotomie dont nous avons précisé les deux membres en analysant la finalité du connaître ; et nous faisons observer que les bourbakistes auraient assez mauvaise grâce à nous reprocher de « catégoriser ». L'acte de connaître est justifié en tant qu'il est partie intégrante d'un acte de contemplation, soit que celui-ci ait pour *objet* une *réalité* transcendante dans la fruition de laquelle l'homme trouve sa béatitude, soit que cet acte théorétique porte censément *en lui-même* sa propre raison d'être, savoir la joie de l'exercer ou l'honneur de l'esprit. Voilà donc trois éventualités qui, a priori, c'est-à-dire au point de vue de la catégorisation, sont également possibles. Laquelle ou lesquelles convient-il de retenir s'il s'agit de la finalité qui concerne en propre la connaissance et le savoir mathématiques ?

En fait, les réformateurs bourbakistes retiennent les deux dernières éventualités, joie de connaître ou honneur de l'esprit; c'est-à-dire qu'ils font choix du second membre de la dichotomie. Cela, de prime abord, paraît légitime. La difficulté vient de ce qu'au moins en fait, nous ne disons pas d'intention, ce choix *exclut* le premier membre de la dichotomie. Ce point important demande explication.

L'acte théorétique ne peut avoir d'autre *objet* à la fois transcendant et *réel* que Dieu, atteint comme Principe et Fin soit de l'ordre naturel soit de l'ordre surnaturel. Nul ne s'avisera donc d'assigner pour fin à la mathématique, ou d'ailleurs à l'art, un acte théorétique dont l'objet, supposé transcendant pour être fin, serait une réalité autonome, et pas seulement une réalité mentale, celle-ci étant construite à partir de la réalité ou bien exclusivement par l'esprit. Il est d'ailleurs bien connu que le Beau n'a pas raison de fin, parce qu'il n'est pas le Bien, et que la plus insidieuse séduction que puisse exercer la beauté consiste à se présenter comme constituant la fin, alors qu'elle ne l'est pas et ne peut l'être ; séduction insidieuse, car la fin étant fonctionnellement et concrètement toujours unique, ce qui n'est pas la fin et en usurpe le rôle élimine par le fait même la fin véritable.

Il se produit, en l'occurrence, quelque chose de semblable. La principale visée du bourbakisme est en effet, directement, l'axiomatisation. Or, si l'axiomatisation favorise grandement la

clarté des exposés ce qui est fort heureux, elle a d'autre part une portée beaucoup plus profonde. Les Bourbakistes en sont d'ailleurs lucidement conscients, puisqu'ils ont réussi, en mettant en œuvre l'axiomatisation fort habilement, à présenter l'ensemble de la mathématique comme étant *formellement autoconsistant*. Nous entendons par là que l'exposé, dans sa forme, « formellement », exclut tout recours à l'intuition pour fonder les notions primitives. Les Bourbakistes reconnaissent la nécessité de cette intuition, et même y insistent ; mais, selon eux, ce recours ressortit à un stade de l'éducation qui est prémathématique. La mathématique commence au moment où l'axiomatisation permet de poser les réalités proprement mathématiques sans aucune référence à une réalité autre qu'elles-mêmes.

Il en résulte, inéluctablement, que l'acte théorétique propre à la mathématique est *coupé* de la réalité non mathématique, c'est-à-dire de tout ce que le sens commun désigne spontanément comme étant « le réel ». Nous disons bien *coupé*. Que l'acte théorétique propre à la mathématique n'ait pas formellement pour objet le « réel », qu'il convienne par conséquent d'en discerner et d'en assigner les finalités subordonnées, joie de connaître et bonheur de l'esprit, cela on l'a toujours admis et même on l'a toujours dit. Les Bourbakistes le disent également ; mais leur assertion acquiert une portée nouvelle — et fâcheuse —, du fait qu'ils font de l'axiomatisation un principe absolu, alors qu'elle est seulement et devrait demeurer un utile instrument. La conséquence est une sorte de pan-mathématisme qui correspond, dans l'ordre théorétique, à ce qu'est l'inflation du « technique » dans l'ordre pratique. Il n'est plus possible, dans cette vue, que la mathématique serve, « théorétiquement », autre chose qu'elle-même ; il est donc impossible de lui assigner une véritable finalité, impossible par conséquent d'en assigner la finalité propre.

Cette finalité propre de la mathématique, selon nous, la voici. La fin de *la* « theoria » étant l'acte qui donne prise sur la Réalité à la fois objective et transcendante, c'est-à-dire sur Dieu, et toute « theoria » particulière pouvant avoir plusieurs finalités subordonnées, celle de ces finalités qui est primordiale consiste à concourir à l'acte qui est, absolument, la fin de *la* « theoria ». Or, les catégories que l'esprit met spontanément en œuvre pour exercer cet acte, peuvent et doivent être élaborées à partir de la réalité concrète, objet de l'expérience immédiate. Une mathématique non coupée de la réalité bien qu'elle n'ait pas formelle-

ment pour objet la réalité elle-même, c'est-à-dire une mathématique non bourbakienne ne laissant cependant pas d'être véritablement une mathématique, peut contribuer à préciser, à « affiner » la notion de *relation*, laquelle structure nécessairement l'acte par lequel l'esprit atteint la Réalité objective et transcendante, puisque celle-ci ne peut être atteinte que relationnellement. Cela n'ôte évidemment pas que la mathématique soit pour la joie et pour l'honneur de l'esprit. Mais ces finalités, propres il est vrai, ne sauraient être considérées comme autosuffisantes. Le prétendre reviendrait à affirmer que l'homme se suffit. Fût-ce dans l'ordre théorétique, et surtout dans l'ordre théorétique, c'est faux. Ces finalités propres jouissent d'une irréductible excellence si, conformément à la vérité, elles demeurent subordonnées. Et elles le demeurent, en même temps que la mathématique elle-même, si celle-ci a primordialement pour fin d'élaborer en vue d'un plus haut service les catégories qu'elle met en œuvre d'une manière singulière et dont elle permet une meilleure compréhension.

Nous sommes d'ailleurs en accord sur ce point avec le bourbakisme, du moins « matériellement ». Les exposés « modernes » mettent en effet la relation en très vive lumière. Mais, conséquence inéluctable de la « coupure » qu'implique l'axiomatisme, cette « relation » de la mathématique moderne est, nous le verrons, elle-même « coupée » d'avec la « relation » telle qu'elle se trouve dans la réalité.

En résumé, au point de vue de la finalité, on peut dire que la mathématique moderne et la réforme qu'elle suscite dans l'enseignement peuvent être fructueuses en ce qu'elles sont ou en ce qu'elles opèrent positivemnt. Mais elles risquent d'être insidieusement nocives par l'exclusion et par la coupure qu'elles impliquent organiquement.

2A. La remise en question de l'essence de la mathématique considérée à partir de la mathématique.

Nous considérerons d'abord l'essence elle-même de la mathématique. Ensuite, les données qui sont liées intrinsèquement à cette essence, savoir : l'unité de la mathématique, le type des entités que spécifie la mathématique.

1. La remise en question des notions primitives.

Le qualicatif « mathématique », « l'(es) être(s) mathématique(s) », désignent, selon la philosophie traditionnelle, la nature des entités qui procèdent de l'esprit lorsque celui-ci considère la réalité au point de vue de la quantité, et la « pose dans le nombre » pour la comprendre. L'être mathématique a, dans cette vue, deux fondements, réellement distincts et indissociables : d'une part l'acte de l'esprit, sans lequel ne pourrait exister l' « unité d'une pluralité », en quoi consiste le nombre ; d'autre part la multiplicité en acte ou en puissance, soit extramentale et en fait sensible, soit intra-mentale et immanente au

« discours » de la raison, multiplicité *objectivement* donnée c'est-à-dire donnée à titre d'*objet*, sans laquelle l'esprit lui-même, *le noûs*, dont l'acte est simple, ne pourrait inventer le nombre.

La philosophie traditionnelle, fondée sur le sens commun mais en l'occurrence sous-mesurée par lui, n'a guère mis en lumière que le fondement objectif [8]. Elle n'ignore évidemment pas que l'être mathématique n'existe qu'en vertu de l'acte de l'esprit, mais elle caractérise cet acte comme étant une sorte de filtrage grâce auquel l'esprit ne perçoit, passivement, de la réalité, qu'un cadre sans contenu. Point de place, dans cette théorie, pour ce qu'on appelle aujourd'hui, d'une manière inconsidérément généralisée, la « créativité ».

Les mathématiciens n'ont pas attendu Bourbaki pour faire une « mathématique vivante », et donc pour restituer, *in actu*, à la créativité la place qui lui revient en droit. Les Bourbakistes d'ailleurs en conviennent, et ils entendent bien être fidèles à leurs maîtres en insistant sur la nécessité et sur la valeur de la créativité. Mais leur originalité consiste, si l'on ose dire, en l'intransigeance de leur dogmatisme.

Si, en effet, la philosophie traditionnelle ne pose en fait que le fondement objectif, elle n'exclut cependant pas le fondement subjectif bien qu'elle néglige de le considérer ; tandis que les Bourbakistes excluent le fondement objectif par le fait même que leur construction pose le fondement subjectif comme étant auto-suffisant. Le bourbakisme innove donc en s'opposant, et cela doublement : premièrement, il consacre, pour la mathématique, la conception qui est exactement contraire à la conception traditionnelle ; deuxièmement, il tient que cette sienne conception est la seule qui exprime avec exactitude la nature de l'être mathématique. Telle est, au point de vue épistémologique, l'implication de l'axiomatisme. Et nous entendons par axiomatisme le fait de fonder la mathématique exclusivement sur l'axiomatisation.

Cette position, extrême, n'est explicitée, ni dans les exposés élémentaires, ni dans les ouvrages de haute vulgarisation qui présentent ces exposés au corps enseignant ; mais elle est partout sous-jacente, et elle se manifeste en ceci : le rapport que la mathématique soutient avec la réalité est amenuisé ou écarté ; le rapport que la mathématique soutient avec l'esprit est majoré, voire présenté comme étant le seul à exister. Nous

(8) En Aristote, « ta mathematica » signifie les entités mathématiques plutôt que l'activité du mathématicien.

allons donner quelques indications concernant chacun de ces deux points. Nous en confirmerons ensuite la portée en nous plaçant à un point de vue synthétique.

A. Le rapport de la mathématique à la réalité est amenuisé ou écarté.

Le nombre.

« C'est par un abus de langage qu'on a pu écrire des expressions telle que '8 pommes + 7 pommes = 15 pommes' qui n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni au langage usuel. On n'écrit donc pas '8 pommes + 7 pommes = 15 pommes'. On écrit : le nombre de pommes est (8 + 7) : '8 + 7 = 15' » ([6], 9).

Nous contestons que l'expression « contestée » n'appartient pas au langage courant. On n'emploie pas cette expression couramment, parce qu'il est inutile d'exprimer, au sein d'un groupe, une chose qui est objet de perception immédiate pour les membres du groupe. Si par exemple à la fin d'un repas, on réunit dans un même récipient les 7 pommes qui restent dans une première coupe et les 8 pommes qui restent dans une seconde coupe, quiconque pensera, sauf les Bourbakistes en tant que cerveaux quoique non en tant que commensaux : « 8 *pommes* et 7 *pommes*, ça fait 15 *pommes* ! » Et si quiconque le pense, il est inutile de le communiquer et partant de l'exprimer. Le Bourbakiste, en tant que tel, est d'un autre avis. Mais si on accepte le purisme qu'il prétend imposer, c'est également un « abus de langage » de dire « 8 pommes ». Il faut dire : 8 est l'attribut d'une classe dont cet ensemble [mais qu'est-ce qu'un ensemble ? !] de pommes est un cas particulier, [ou une réalisation, ou... ?] ». Ou bien, et mieux sans doute : « La classe dont cet ensemble de pommes est une... pommification, a pour nombre : 8 ». Voilà qui simplifie, et agrémente, le « langage courant ».

Les Bourbakistes répondraient probablement que le langage mathématique n'est pas le langage courant, et que même il doit ne pas l'être. Nous reviendrons, dans la troisième partie, sur ce point qui ressortit à la pédagogie. Observons pour le

moment que la querelle des « huit pommes » ne fait que manifester, au niveau de l'enseignement élémentaire, l'opposition que nous avons relevée entre les deux manières traditionnelle et bourbakienne de concevoir l'être mathématique. Ce cas, bien concret, reconduisant aux fondements, il permet d'en préciser la portée.

La locution « huit pommes », ou le jugement « 7 + 5 = 12 », ou autres... ont toujours attiré l'attention des philosophes. Rappelons la distinction, en l'occurrence méconnue, faite par Aristote entre le nombre nombré et le nombre nombrant[9].

Le *nombre nombré* est celui d'une collection concrète. Quiconque compte des *pommes*, exprime le résultat de l'opération une fois terminée dans un jugement : « Il y a 8 *pommes* ». Ce « huit », qui est, pour quiconque sauf pour les Bourbakistes, le nombre de l'ensemble des *pommes*, est un « nombre nombré ». Et pareillement s'il y avait 8 poires, ou 8 fruits... ou 8 objets *concrets*.

Le *nombre nombrant* est le nombre qui est dans l'esprit. Quelle que soit la nature des objets qui composent l'ensemble, le nombre de celui-ci est « huit » ; et ce « huit » est dans l'esprit et il est dit « nombre nombrant », en tant que l'esprit ne retient, de l'ensemble concret, que la multiplicité des suppôts, et considère cette multiplicité comme une entité autonome, c'est-à-dire comme une *entité intramentale et sans référence nécessaire au concret, bien qu'une telle référence ne soit pas exclue.*

Répétons, pour le nombre, ce que nous avons rappelé pour l'être mathématique en général.

Celui-ci requiert l'un et l'autre de ses deux fondements, réellement distincts et indissociables. Pareillement, le nombre requiert le nombre nombré et le nombre nombrant. C'est-à-dire que si l'un ou l'autre faisait défaut, le nombre n'existerait pas. Sans nombre nombré, sans ensemble concret à nombrer, cet ensemble pouvant d'ailleurs être constitué par des réalités intra-mentales, par exemple par des actes de l'esprit perçus comme différents les uns des autres, sans nombre nombré donc,

(9) Il y a même un troisième terme : « le nombre que l'esprit est en train de nombrer ». C'est ce nombre-là, irréductible à tout autre, qui intervient dans la définition du temps, et il est en affinité avec la « créativité ». Mais pour situer le bourbakisme, dont le postulat au point de vue épistémologique est l'univocité, il suffit de considérer pour le nombre la dichotomie « nombrant-nombré ».

l'esprit ne découvrirait pas en lui-même, comme l'un des fruits immanents de son opération propre, le nombre nombrant, et il n'y aurait nombre d'aucune façon. Sans nombre nombrant, sans l'aptitude que l'esprit possède en propre d'affirmer l'unité d'une pluralité, il n'y aurait ni acte de nombrer ni par conséquent nombre nombré ; derechef, il n'y aurait aucunement nombre.

Ajoutons que la dualité essentielle au nombre, révélatrice quant à la nature de la dualité qui est propre à l'être mathématique, tient à ce qu'il n'y a pas de *priorité* absolue, soit du nombre nombré par rapport au nombre nombrant, soit inversement.

Il est aisé de s'en rendre compte en considérant la genèse du nombre. L'observation et l'appréhension d'ensembles concrets induit l'esprit à découvrir, comme fruit de son opération propre, le nombre nombrant. L'esprit, ensuite, attribue le nombre nombrant à l'un des ensembles concrets d'où il est parti : il y a alors nombre nombré. Le nombre nombré exprime en quelque sorte la confirmation expérimentale de l'induction dont le nombre nombrant constitue le medium intelligible. Au point de vue de l'esprit, le nombre nombrant est premier ; il constitue un absolu *dans cet ordre qui est celui de l'esprit*, ordre « particulier » par conséquent. Mais il faut ajouter que l'esprit *n'est* lui-même, n'a sa réalité propre d'esprit, qu'en acte, et que l'esprit n'est en acte qu'en saisissant un objet. En sorte que le nombre nombrant se trouve ontologiquement subordonné, non formellement au nombre nombré, mais à la multiplicité nombrable qui n'est donnée à l'esprit comme multiplicité que dans une réalité réellement distincte de l'acte de l'esprit et partant du nombre nombrant. Le nombre nombrant dépend donc, comme tel, d'autre chose que de lui-même. Absolument, il n'est pas un absolu. Et donc, absolument et partant inconditionnellement, il est aberrant, toujours aberrant, de présenter le nombre nombrant comme s'il était un absolu.

Nous pouvons maintenant situer avec précision le purisme bourbakien. Il ne consiste pas à simplement *ne pas considérer* le nombre nombré, il l'*exclut* : « On *n'écrit* donc *pas* '8 pommes + 7 pommes = 15 pommes' ... on écrit ... '8 + 7 = 15'. »

Or, nous venons de le rappeler à partir de l'expérience, exclure le nombre nombré, c'est en fait et quoi qu'on en veuille détruire l'unité et partant la réalité du nombre ; c'est donc *détruire le nombre nombrant lui-même*. Il est certes légitime, en mathématiques, de *ne pas considérer* le nombre nombré, à la

condition toutefois de stipuler : que premièrement, on ne l'exclut pas ; que deuxièmement, ne le considérant pas, on laisse ouverte la question de savoir quel type d'entité est le nombre que l'on considère en fait, lequel formellement coïncide avec le nombre nombrant.

Il eût donc fallu compléter et préciser le texte cité par les mots que nous écrivons en italiques : « On n'écrit donc pas, *dans le développement formel de la mathématique...* » *Mais si on examine la question du fondement des mathématiques, on doit écrire, non seulement* '8 + 7 = 15', *mais également* '8 pommes + 7 pommes = 15 pommes'. Or le bourbakisme *exclut* cet « amendement », absolument et radicalement ; parce qu'il prétend fonder la réalité propre du nombre nombrant exclusivement en « axiomatisant », indépendamment du nombre nombré par conséquent. Telle est la portée véritable de la négation catégorique : « On n'écrit donc pas ».

A la faveur d'un purisme, qui, chez les épigones, devient souvent pédant et déplacé, le bourbakisme insinue donc, d'une question difficile qu'on laissait ouverte, une résolution dont nous venons de voir qu'elle ne peut être consistante et dont nous verrons qu'elle est fallacieuse. Se trouve suggérée, dès l'enseignement élémentaire, une conception selon laquelle le nombre qu'étudie la mathématique, non seulement abstrait du rapport qu'il soutient avec le concret ce qui est légitime, mais exclut toute référence au concret ce qui est contradictoire.

Le Continu.

La même difficulté se trouve impliquée dans la présentation qui est faite de la seconde des notions primitives étudiées par la mathématique, la quantité continue.

Celle-ci, droite, ou plan, etc... est définie comme étant un ensemble de points. Et c'est bien à cette définition qu'il est implicitement renvoyé lorsqu'il s'agit de définir à partir de là, et puis de mettre en œuvre, d'autres notions plus complexes, par exemple celle de fonction [10]. Le continu se trouve ainsi

(10) « Ce que les Anglo-Saxons ont longtemps appelé le théorème fondamental du calcul (*) (sous-entendu : différentiel ou intégral) n'a sans doute plus l'importance de jadis.

(*) Si f est une application continue du segment [a, b] dans la droite réelle, l'application $x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$ admet f pour dérivée. » ([13], 18) (cf. note 52).

« axiomatisé », puisque la définition en est ramenée à celle d'un ensemble. Mais cette manière de concevoir *exclut en fait celle qui correspond à la perception sensible du continu.*

Il suffira, pour le faire comprendre, de rappeler un fait bien connu. Il y a autant de points dans un segment de droite que dans le carré ayant ce segment pour côté. Il est en effet possible d'établir, entre l'ensemble des points du segment et l'ensemble des points du carré, une correspondance bi-univoque, ou selon la terminologie « moderne », meilleure il faut le reconnaître parce que plus précise [11], une « bijection ». Mais cette correspondance *n'est pas bi-continue.* C'est-à-dire qu'à des points indéfiniment voisins du segment ne correspondent pas, dans le carré, des points indéfiniment voisins ; ou, en d'autres termes, si on décrit continuement le segment, le point du carré qui correspond au point actuellement atteint sur le segment ne décrit pas dans le carré une ligne continue : il « saute » continuellement, à l'intérieur du carré.

Ainsi le continu, qu'il soit à une, ou à deux, ou à un nombre infini (dénombrable) de dimensions a toujours le même nombre de points. Mais chaque continu inclut un élément nouveau et irréductible, savoir l'*ordre*. Cela est mis en évidence par la différenciation mutuelle que l'on découvre entre les différents continus ; mais cela signifie *objectivement qu'un certain* ordre appartient *intrinsèquement* à chaque continu, et partant que l'*ordre* appartient *intrinsèquement* au continu.

Or, si l'appréhension sensible du continu atteint d'une manière seulement confuse et le *nombre* des points et leur *ordre*, l'axiomatisation ensembliste proposée par le bourbakisme met le nombre en évidence mais écarte l'ordre. Il serait juste de dire : « le continu est un ensemble de points » ; mais il n'est pas exact de *définir* le continu comme étant un ensemble de points, parce qu'*il est également de l'ordre.* Et si, grâce à la notion de structure topologique, qui constitue une élaboration ultérieure, la notion d'ordre est, en fait et en vertu de l'exigence même de la technique mathématique, restituée dans le « Bourbaki savant », elle n'est pas mentionnée dans les exposés élémentaires, et elle est écartée par les épistémologues du bourbakisme, conduits qu'ils sont par l'intransigeance de l'axiomatisme, à ramener la notion de relation à celle d'ensemble ([13], 48). Il reste donc que le continu, bourbakien, tel qu'il est présenté, axiomatisé et univocisé, n'est pas le continu réel ; et comme

(11) Elle distingue le « sens » de la relation qui réalise l' « application ».

il n'est pas possible de lui « ajouter » l'ordre qui le rendrait réel parce que la nature de cet ordre est inconnue [12], il s'ensuit que ce continu est non seulement non réel, mais en outre *coupé* d'avec la *réalité*.

Le même vice se retrouve donc dans la présentation bourbakienne des deux données qui spécifient l'essence de la mathématique ; et nous ferons la même constatation tout au long de cette étude. L'axiomatisme est posé comme un principe absolu, alors que l'axiomatisation est en réalité un utile instrument. Cela a pour effet — ou pour finalité ? — d'exiger que la mathématique ne puisse être authentique sans être coupée de la réalité ; alors que la mathématique vraie doit demeurer possiblement ouverte à la réalité, sur laquelle elle est radicalement fondée.

L'ensemble.

La notion primitive de la mathématique moderne, c'est-à-dire la notion de laquelle toutes les autres sont censées dériver, c'est celle d'*ensemble*. On y recourt constamment ; par exemple, pour définir le nombre négatif, on suppose acquise la notion de « classe » [13]. Cela est parfaitement légitime ; il faut même ajouter que la valeur d'un savoir, et en l'occurrence celle de la mathématique *moderne*, vient précisément de ce que toute question trouve sa résolution dans les données qui sont posées au titre de principes.

Mais si on demande au Bourbakiste : « Qu'est-ce qu'un ensemble ? », il renvoie à l'expérience, tout comme naguère on renvoyait « aux pommes » quiconque osait demander : « Qu'est-ce qu'un nombre ? » ([6], 9). La notion d'ensemble n'est en effet définie que d'un point de vue opérationnel [14] : c'est-

(12) Le cardinal tranfini qui correspond à l'ensemble des points du continu, ne peut être rangé dans la suite des cardinaux transfinis issus du discontinu. On n'a pas démontré cette impossibilité. L'observer comme un fait reconduit à la réalité, à savoir que le continu est une donnée objective tandis que les cardinaux transfinis sont une construction de l'esprit.

(13) Classe de 5e ([9], 79 sv.). La théorie du nombre négatif est ainsi rendue parfaite, parfaite selon le point de vue adopté pour construire tout l'ensemble de la mathématique. Mais le vice qui affecte l'ensemble rejaillit sur chaque partie.

(14 « [1.1.15] On aura le droit de nommer des êtres distincts ensembles et éléments si et seulement si il est possible, pour chaque

à-dire que, absolument, elle n'est pas définie : « Je ne prétends pas avoir défini les mots *ensemble* et *élément* ; non plus que l'expression 'être élément de' ou 'appartenir à'. Dans [1.1] et [1.2] nous avons vu comment l'expérience courante était formalisée en un langage mathématique épuré » ([14], 15).

Nous ne critiquons pas les Bourbakistes de définir, ou plus exactement de caractériser, les notions primitives qui constituent la base de leur construction, exclusivement à leur point de vue c'est-à-dire en fonction de cette construction. Autrement dit, nous estimons légitime la définition opérationnelle ([14], 2). Et nous estimons non moins légitime de justifier et de fonder cette définition à partir de l' « expérience courante » ([14], 15). Ainsi, déjà nous l'avons dit, nous sommes en accord avec les Bourbakistes, du moins quant à ce qu'ils font. Non pas quant à ce qu'ils déclarent ou prétendent faire.

De ce qui précède résultent en effet deux observations.

Premièrement, la situation de la « mathématique moderne » en regard de la réalité est, *en fait*, et quoi qu'en veuillent les réformateurs, exactement la même que celle de la « mathématique traditionnelle ». Les notions primitives, il est vrai, ont changé. Ce ne sont plus le nombre et le continu, mais ce sont l'ensemble et la structure [15]. Ce changement est certes d'importance ; mais il ne doit pas masquer que, fondamentalement, les « modernes » ne s'y prennent pas autrement que leurs aînés. Premièrement, parce qu'ils font choix de certaines notions comme étant primitives. Deuxièmement, parce qu'ils caractérisent d'une manière suffisante au point de vue propre de la mathématique, *sans les définir réellement* au point de vue métaphysique, les notions choisies comme étant primitives. Troisièmement, parce que, concernant respectivement chacun de ces deux points, d'une part ils renvoient à l'expérience et d'autre part ils déclarent leur non-compétence. Tout cela, on l'a tou-

élément, et pour chaque ensemble, de répondre par « oui » ou par « non » (et pas par « oui et non » ou « ni oui ni non ») à la question : cet élément appartient-il à cet ensemble ? » ([14], 2.)

M. A. Revuz dit, en substance, la même chose ([13], 35).

(15) « L'essentiel me paraît être le dégagement des structures fondamentales, l'utilisation du langage de la théorie des ensembles, une algébrisation croissante de tous les domaines et un dynamisme constant (en ce sens que tous les êtres étudiés sont, à chaque instant, en relation avec l'autre etc...) (G. Choquet [1], 22).

« Aujourd'hui les notions ensemblistes, les structures fondamentales de l'algèbre, les idées de base de la topologie irriguent toutes les mathématiques d'un sang neuf... » ([5], 5).

jours fait. Nous pensons qu'on le fera toujours, parce que l'acte de l'intelligence ne peut être exercé par l'homme que dans les conditions spécifiées par la nature humaine. Et, en conséquence, il nous parait normal que les Bourbakistes fassent ce qu'on a toujours fait, et il nous parait heureux, nous le répétons, qu'ils le fassent fort bien, à ne considérer strictement que le point de vue du mathématicien.

La seconde observation découle de la première. Au point de vue, fondamental, celui du rapport que soutient la mathématique avc la réalité, les Bourbakistes font, nous venons de le voir, ce qu'on a toujours fait. Pourquoi dès lors, se targuent-ils de faire autrement, et mieux évidemment ?

Un réformateur savant, et non des moindres, observe qu'*avant* « on s'interdisait de définir ce qu'est une aire » [16]. Et maintenant ? Eh bien, *maintenant*, même à supposer qu'on puisse axiomatiser la notion d'aire par la notion d'ensemble, ce qui absolument n'est pas vrai [13], *maintenant* on opère sur les ensembles, mais on renonce à définir *ce qu'est* un ensemble, même si on n'est pas assez lucide pour juger qu'on doit, en mathématiques, s'interdire de le définir.

Nous devons d'ailleurs ajouter que le même auteur, lorsqu'il s'exprime positivement au lieu de critiquer, est beaucoup plus proche de ce que nous croyons être la vérité. Il tient en effet qu'on ne doit pas « énoncer un axiome sans indiquer quelle en est l'origine » [17]. Or les axiomes étant, d'après le même auteur

(16) « Et que penser d'une rigueur qui se permettait des pirouettes du type « Nous avons la notion du nombre entier », (ou d'aire), et admettait qu'avec cela elle en avait assez dit pour avoir le droit d'étudier valablement la notion ainsi « introduite ». On calculait des aires, mais on s'interdisait de définir ce qu'est une aire... » ([13], 60.)

Et, parallèlement, Mlle Félix ([12], 14), après avoir cité le traité de Goursat « On suppose que le lecteur a déjà acquis ces notions (nombre entier, droite...) », commente : « Le lecteur n'est pas initié à ces mystères trop subtils pour lui. »

(17) « Le mot « axiomatique » est parfois brandi pour foudroyer toute tentative de rénovation. On veut y réduire toute la nouvelle mathématique, et on ajoute : « Il ne faut pas faire d'axiomatique dans l'enseignement élémentaire ». A vrai dire, je n'arrive pas toujours très bien à saisir ce que ce terme désigne dans l'esprit de beaucoup de ceux qui l'emploient. » ([13], 74.)

« Enoncer des axiomes, sans indiquer quelle est leur origine (dans la situation réelle, ou mathématique, que la théorie a pour but d'étudier) est une autre forme de malhonnêteté, et réduit la mathématique à n'être qu'un pur jeu de l'esprit. » [13], 74).

et fort justement, les « propriétés de départ d'une théorie », ils ne peuvent avoir une origine qui leur serait homogène. Les notions qui sont assignées comme primitives dans la mathématique ne peuvent avoir une « origine » formellement mathématique. C'est pourquoi, *avant*, on ne définissait pas, en mathématiques, les notions de nombre (ou d'aire). C'est pourquoi, *maintenant*, on ne définit pas, en mathématiques, la notion d'ensemble. On est donc surpris que M. A. Revuz, si lucide, critique ce qui était « avant » en insinuant par là qu'on fasse mieux « maintenant ». En ce qui concerne le rapport « mathématique-réalité », on fait, nous le répétons, la même chose exactement. Mieux vaudrait en convenir nettement [18].

(18) Les réformateurs admettent d'ailleurs sans difficulté la nécessité d'une référence à la réalité au point de vue pédagogique : « Un modèle matériel est la base à partir de laquelle on peut développer l'abstraction mathématique. » ([1], 3). Mais ils n'aperçoivent pas que cette nécessité tient à la nature de l'esprit humain ; et même de l'esprit créé, en ce sens que celui-ci, absolument, ne peut créer ses propres objets. Cette norme demeure vraie, bien qu'elle s'applique d'une manière plus subtile, en ce qui concerne les données primitives de tout savoir ou d'ailleurs de tout art.

Signalons, sans nous y attarder, que certains réformateurs pédagogiques, fort en renom, non savants sinon commerçants, inventent d'étranges facéties qui contribuent certainement à leur succès, non sans dommage pour la vérité. L'égalité $2 + 3 = 5$ est composée de cinq signes. Ces cinq signes donnent lieu à 120 « permutations » différentes. (Par exemple : $2 = 3 + 5$, ou $= + 2\ 3\ 5$, etc.) Eh bien, d'après la célèbre réformatrice pédagogue que nous citons, les enfants répètent : $2 + 3 = 5$, parce que cette permutation-là, et elle seule parmi les 120 possibles, est « admise » ([2], 23). Il n'est évidemment pas question, pour cette éminente pédagogue, de se demander si les enfants continueraient à répéter $2 + 3 = 5$, à supposer que ce ne fût pas conforme à leurs observations. Que l'application de la « réforme » soit confiée à de tels personnages est assez alarmant. — Nous avons dit nous placer au point de vue des réformateurs savants. Nous posons toutefois, en passant, à cette réformatrice, la question suivante. Son nom comporte six lettres, son prénom six lettres. Comme il y a deux fois la lettre C et deux fois la lettre I, on peut, avec ces douze lettres, former $N = \frac{1}{2.2!}\ 12\ ! = 3.11\ !$ permutations différentes. Et si on sépare chacune de ces permutations en deux groupes de six lettres pour respecter la donnée originelle, on voit qu'en appliquant au nom de l'éminente réformatrice le traitement qu'elle fait subir à l'égalité $2 + 3 = 5$ on est conduit à se poser et à lui poser les questions suivantes. Premièrement, cette personne répète-t-elle son propre nom *tel qu'il est* exclusivement pour cette raison qu'il est la seule permutation « admise » parmi les N possibles ? Deuxièmement,

B. La subordination de la réalité mathématique à l'activité du sujet est, dans la présentation « moderne », majorée.

Nous disons « présentation », car la présente observation ne s'applique guère qu'à l'utilisation ou à la communication de la mathématique ; non à la véritable mathématique, actuellement élaborée par les mathématiciens en acte. Pour ceux-ci, le rapport de la réalité mathématique à l'acte de l'esprit *est ce qu'il est*. La nature ne peut en être discernée et précisée que dans une réflexion *a posteriori* ; et si l'errance peut s'introduire dans cette réflexion, toute altération du rapport lui-même est impossible, puisqu'il résulte de la confrontation immédiate entre l'esprit et la *réalité*.

La présentation moderne de la mathématique est nouvelle en ceci qu'elle accorde un rôle prépondérant à la « représentation ». Telle est la donnée originelle d'où découlent, nous le verrons, deux conséquences fort importantes au point de vue auquel nous nous plaçons, celui du rapport que soutient la réalité mathématique avec l'activité du sujet.

M. M.L. Vendendriessche affirme : « Il ne s'agit pas d'étudier ces applications (d'un ensemble sur un autre), mais simplement de les représenter » ([4], 52). Et c'est effectivement cela qui est fait, dans les classes élémentaires il est vrai. En cherchant à « appliquer » l'un sur l'autre les deux ensembles ' écureuil, vache, lapin ' — ' herbe, noisette, carotte ', on montrerait aux enfants, à propos du cas particulier ' manger — être mangé ', la différence entre la voix active et la voix passive ([3], 1-3). Ou bien, un enchaînement de dichotomies étant proposé, on cherche à déterminer les conclusions qui peuvent en

s'est-elle *réellement* posé la question de savoir pourquoi son nom est son nom, et pas l'une des (N-1) autres permutations ? Troisièmement estime-t-elle qu'une telle question, ou celle qu'elle pose à propos de 2 + 3 = 5, ait un rapport quelconque soit avec la connaissance de la réalité, soit avec la science mathématique ? Quatrièmement, est-elle assurée d'avoir résolu la question qu'elle pose, en employant le mot « admis », qui recouvre beaucoup d'autres questions ? Cinquièmement, estime-t-elle rendre réellement service aux pédagogues qu'elle est chargée de former, en dissimulant sous un facilisme pédant la véritable et difficile question posée par le rapport de la mathématique à la réalité ?

résulter, non par un raisonnement abstrait, mais en construisant un 'arbre' qui représente toutes les situations possibles ([8], 90). Et, plus généralement, et qui plus est, on a tendance à *substituer* aux équations algébriques elles-mêmes leurs représentations graphiques, aux relations, leurs « graphes »...

Cette manière de procéder présente des avantages trop manifestes pour qu'il soit besoin d'y insister. Les enfants peuvent mettre à profit les ressources, si vives pour eux, de l'imagination, et partant de la forme de mémoire qui lui correspond ; pour la plupart, mieux adéquatement « en acte », ils peuvent étudier avec goût et avec fruit. Mais l'emploi systématique de ces méthodes, lequel *équivaut en fait à l'éviction complète* des méthodes dites « traditionnelles », nous parait présenter deux écueils très graves.

L'acte de raisonner.

L'écueil principal, dont le second, quoique plus apparent, n'est qu'un aspect dérivé, consiste en ce que l'acte propre de l'intelligence raisonnable, acte qui consiste précisément à raisonner, n'apparaît plus : ni quant à l'exercice, ni quant aux conditions, encore moins quant à la nature.

Reprenons l'exemple — vécu — proposé par M. A. Roumanet[19]. « Sur 35 élèves, 13 ont donné une bonne réponse correctement justifiée, 9 ont indiqué la réponse correcte sans justification, ou une partie de la réponse, 13 n'ont pas répondu ou ont répondu d'une façon incorrecte ».

Or si on considère ce qu'ont fait, selon le témoignage de M. R. lui-même, les 13 premiers élèves, on observe qu'ils ont tout simplement et spontanément mis en œuvre les deux normes

(19) Enoncé de l'exercice proposé aux élèves (classe de 6e) :

— De deux choses l'une : ou bien le malfaiteur est venu en voiture, ou bien le témoin s'est trompé.

— Si le malfaiteur avait un complice, alors il est venu en voiture.

— Le malfaiteur n'avait pas de complice et il n'avait pas la clé de l'appartement, ou le malfaiteur avait un complice et il avait la clé de l'appartement.

— On a maintenant la preuve que le malfaiteur avait la clé de l'appartement.

Sont énoncées ensuite cinq conclusions. Et il est demandé aux élèves de déterminer lesquelles sont vraies. ([8], 90.)

fondamentales du raisonnement. Le raisonnement réel, concret, employant toujours la logique « à deux valeurs », la première norme du raisonnement consiste à *partir d'une proposition vraie*, ou supposée telle[20] ; même si cette proposition vraie est signifiée par sa contradictoire supposée fausse. La raison en est, — faut-il le rappeler ? — qu'on ne peut conclure d'une manière catégorique qu'à partir du vrai. Or, en l'occurrence, ce sont les élèves de M. R., les élèves et non le maître, qui ont montré *in actu* ce en quoi consiste l'acte de raisonner. Ils ont en effet pris pour point de départ de l'inférence correcte la seule des propositions composant l'énoncé qui soit énoncée comme étant la vérité, c'est-à-dire la quatrième et dernière. A partir de cela seulement, de cela supposé vrai, on pouvait « décider » si les conclusions par ailleurs proposées étaient soit vraies soit fausses.

La seconde norme du raisonnement consiste, faut-il encore le rappeler ? en ce que, pour raisonner, il faut trouver un *medium* (ou plusieurs « media ») permettant de passer des prémisses supposées vraies à la conclusion. La chose était, en l'occurrence, très facile, et même trop ; il n'y avait pas à *chercher* le « medium », puisque les « media » se trouvent donnés dans les dichotomies proposées dans les trois premières phrases de l'énoncé. En partant de l'affirmation vraie (4° phrase), et en confrontant successivement avec elle la 3°, puis la 2°, puis la 1re phrase, les conclusions demandées se trouvent immédiatement « décidées ».

Maintenant, si M. R. a estimé instructif d'observer le comportement de ses élèves, il l'est au moins autant d'observer le sien.

Le « corrigé » du devoir a en effet consisté à faire l' « arbre » de la « situation », en partant d'ailleurs, ce qui est bien typique, d'une autre donnée également *certaine*, mais beaucoup moins précise, beaucoup moins *en situation*, savoir : l'existence du malfaiteur. On tient compte ensuite des 4 dichotomies indi-

(20) Il est bien connu que l'instrument propre de la recherche n'est pas la déduction, mais plus précisément la méthode hypothético-déductive au service de l'intuition. On élimine les erreurs ou les pistes sans issue, d' « instinct » : c'est en quoi consiste, spécifiquement, l'acte du génie. D'où, ensuite, on assigne une proposition comme étant vraie. On cherche alors à la démontrer. Parfois on y réussit. Parfois on en démontre qu'elle est fausse. Il arrive également qu'on ne puisse rien démontrer, et qu'il faille recommencer tout le processus. Ce qui importe, c'est que, pour démontrer, on *part* d'une proposition tenue pour vraie.

quées dans les 3 premières phrases (la 3ᵉ comportait deux dichotomies). L' « arbre » aboutit donc à $2^4 = 16$ « cas possibles », *a priori*. On supprime alors les cas *effectivement* impossibles, en revenant sur les conditions de l'énoncé, entre autres — entre autres *sans plus* — la dernière. Il y aurait beaucoup d'observations secondaires à présenter sur la construction de l' « arbre » telle que la présente M. R. Bornons-nous à l'essentiel.

L' « arbre » montre, dans un cas simple, le fonctionnement d'un cerveau électronique. Et comme la fabrication de l' « arbre » a, en fait, constitué le « corrigé » de l'exercice proposé, le professeur a, en fait et quoi qu'il en veuille, *enseigné aux élèves de se comporter comme un cerveau électronique* ; et il ne leur a pas enseigné l'art de raisonner. On n'enseigne pas un art ? Oui, c'est vrai. Mais on dégage les principes d'un art en vue d'en permettre un meilleur exercice à quiconque en est capable. Or tous les êtres humains sont capables de raisonner, puisque tel est le propre de l'intelligence rationnelle ; et si on prolonge la scolarité, si on y densifie le programme scientifique, c'est cela que d'abord il faudrait apprendre aux élèves, ou mieux leur faire découvrir : les principes du raisonnement.

Les 13 premiers élèves de M. R. ont raisonné *juste*. Il leur était utile de le savoir à titre de confirmation, bien que les plus intelligents d'entre eux n'en doutassent probablement aucunement. Mais il est encore plus probable qu'aucun de ces 13 élèves n'a pris conscience de la nature de l'acte de raisonner qu'il avait spontanément posé ; il est fort probable qu'aucun n'a découvert, au moins ce jour-là, ce qu'il avait cependant le droit de savoir et que seul pouvait montrer un maître ; maître humble ou savant, mais maître à *penser* ; et non à jouer, fût-ce à la « machine ». Ces 13 élèves, bien doués pour raisonner, n'ayant pas découvert en quoi ils avaient spontanément appliqué les normes du raisonnement, n'ont pas été instruits de ce qu'il convenait de faire dans un autre cas pour les appliquer également. Ils l'auront découvert, par induction et par eux seuls... au moins certains d'entre eux. Et ceux-là, les meilleurs, ne tarderont pas, si déjà ce n'est fait, à se divertir des « arbres » de M. R. ; ils auront appris à raisonner, malgré l'alourdissante scolarité, et ils sauront de surcroît « nourrir » les cerveaux électroniques. Quant aux 13 derniers élèves, ils ne sauront, ni vraiment raisonner, ni construire un « arbre » sans être aidés, ni se servir eux-mêmes des machines à l'utilisation desquelles les feront servir les 13 premiers élèves. Bilan ? au moins très probablement : la formation d'une petite aristocratie de l'intellect logique... bercée à partir de la classe de 6ᵉ.

Nous ne critiquons pas, le lecteur le comprend, que l'on apprenne aux élèves de 6e à résoudre une situation par la construction de l' « arbre » qui lui correspond. Le procédé peut être commode, il amorce d'ailleurs l'utilisation des machines. Ce que nous critiquons, c'est le fait de *substituer* la construction de l' « arbre » à l'art de raisonner, et de prétendre ainsi réduire celui-ci à celle-là. Cette substitution, caractéristique de la présentation moderne, a pour effet, nous venons de l'observer, de masquer les normes du raisonnement; alors que la tâche principale du véritable éducateur consiste tout au contraire à les mettre en lumière. Insistons sur ce point [21].

Les deux normes que nous avons rappelées sont simples : elles tiennent l'une et l'autre à la nature même de l'acte de raisonner. Découvrir et appliquer la première est aisé, car elle est d'un usage constant. On n'arrive à du « certain » qu'en partant de ce qui est certain, et par conséquent objectivement de ce qui est vrai. En quelque domaine que ce soit, soit positivement soit négativement, l'expérience reconduit sans cesse à ce fait ; il finit par s'imposer pratiquement à titre de réaction spontanée, même à ceux qui n'ont pas besoin d'en prendre conscience parce qu'ils raisonnent « sans le savoir », sans être les « professionnels du raisonnement ».

La seconde norme, savoir la nécessité du « medium » et par conséquent de sa découverte, a toujours été considérée, à juste titre, comme constituant la seule véritable difficulté de l'art de raisonner. Nous ne citerons que pour mémoire Aristote, dont les considérations profondes et circonstanciées demeurent cependant toujours « valables ». Et nous n'avons pas non plus à insister sur le fait que d'abord la validité et ensuite la beauté d'une démonstration tient, notamment en mathématiques, au « medium » (ou « media ») que cette démonstration met en œuvre. Ce à quoi il faut amener quiconque entend « raisonner », que ce soit en mathématiques ou d'ailleurs en général, c'est donc à découvrir le « medium ». Or, s'il y a pour le faire des principes qui, faute de mieux, sont tenus pour suffisamment assurés, il n'y a en retour aucune règle déterminée.

(21) Il ressortit directement à notre troisième partie : communication de la mathématique. Mais il est intrinsèquement lié à la conception « moderne », et d'ailleurs en fait fictive, qu'on voudrait imposer de l'essence même de la mathématique. C'est pourquoi nous en traitons ici.

Le mieux qu'on puisse faire, ou le moins mal, est dès lors d'induire à l'acte de la découverte l'élève ou le disciple, en guidant sa réflexion *à lui*, supposé qu'on en soit capable, dans tel cas concret où il y a effectivement un « medium » à découvrir.

Et le pire que l'on puisse faire, c'est de réduire un tel cas concret au schéma d'une situation ; et cela de telle façon que cette situation puisse être « résolue » par la stricte application de règles univoques ; dans ces conditions en effet, aucun « medium » n'apparait plus, et il est évidemment impossible d'induire l' « autre » à découvrir ce qu'en fait on ne lui présente que dissimulé. Tel est, en substance, l'écueil de la présentation moderne.

La « fausse supposition », dont on usait naguère pour « résoudre un problème par l'arithématique », revenait au fond à assigner un « medium » qui permît d'effectuer l'une après l'autre, séparément, chacune des opérations requises à la résolution. L'élève devait trouver ce medium pour pouvoir utiliser le seul instrument opératoire dont il disposait. L'algèbre accroît la puissance de l'instrument ; mais, par le fait même, il dispense de rechercher le « medium » qu'il rend inutile. On dira, déjà on a dit, que ce « medium » n'était ni cherché ni trouvé par les élèves, mais retrouvé comme une sorte de « truc ». Voire. Et, même simplement retrouvé, ce « medium » était d'une part quelque chose « à trouver » ; et il constituait d'autre part l'étape d'un raisonnement, c'est-à-dire que, fonctionnellement, il était un vrai « medium ». Le problème d'arithmétique, ou le problème de géométrie, ne pouvait donc être résolu sans qu'on appliquât les deux normes du raisonnement, la seconde et la plus difficile notamment. Cette résolution montrait le pourquoi ou le comment [22] de la réponse, c'est-à-dire qu'elle en montrait la vérité, dans la vérité, supposée, des hypothèses.

La résolution algébrique, a fortiori la résolution graphique, ou bien la résolution par construction d'un « arbre », ne montrent pas le lien organique qui existe entre la conséquence effectivement obtenue et son principe propre ; elles ne montrent pas la conséquence dans les principes. Elles sont d'ailleurs dites « valables », ou « exactes » ou « correctes », si elles sont conformes à certaines règles ; « non valables », « inexac-

(22) « Pourquoi » et « Comment » sont équivalents, si on demeure strictement à l'intérieur du domaine mathématique ; précisément parce que la mathématique comme telle n'a pas de finalité qui lui soit intrinsèque.

tes » ou « incorrectes » si elles ne sont pas conformes à ces mêmes règles. L'art de raisonner, qui est par nature ordonné à la découverte de la vérité, n'est donc plus enseigné par la *praxis*, autant qu'il peut l'être, par la « mathématique moderne ».

On dira que la *praxis* de l'acte de raisonner peut être suggérée par d'autres disciplines, et que la tâche de l'analyser et de la normaliser en incombait naguère et en incombe toujours à la logique. Nous répondons que cette allégation n'est pas « valable », c'est-à-dire que, dans la « conjoncture » actuelle, elle induit en erreur. C'est qu'en effet la logique elle-même, et puis la grammaire... et demain la morale [23]... passent l'une après l'autre sous la mouvance de la mathématique *moderne*. Elles se trouvent ainsi *coupées* de la matéphysique à laquelles elles étaient référées, *conformément à l'exigence de leur nature* ; en sorte que, privées de leur sève propre, elles deviennent en fait incapables d'apporter à l'esprit comme tel autre chose que ce que la mathématique moderne apporte elle-même. Telle est la conséquence de l' « hégémonisme » qui est, nous le répétons, inéluctablement inhérent à l'entreprise de la « réforme ».

Présenter en effet la « mathématique moderne » comme auto-suffisante, c'est-à-dire comme fondant par elle seule ses propres principes, c'est refuser *en fait* la discipline à laquelle il revient *en réalité* de fonder ces principes ; c'est donc être entraîné à refuser toute référence concrète à cette même discipline qui est la métaphysique, et par conséquent à refuser de reconnaître ce que la logique par exemple a de spécifique en tant précisément qu'elle comporte elle-même une référence à l'épistémologie et à la métaphysique. La « mathématique moderne » menace de réduire chacune des disciplines dans lesquelles elle pénètre à n'être qu'un cas particulier d'une algèbre universelle. Cela, d'ores et déjà, on l'observe. Or, cela ne tient pas précisément à ce que la « mathématique moderne » choisit, comme primitives, les notions d'ensemble et de structure, et en développe les implications ; cela découle, inéluctablement, de ce que ces notions primitives sont posées comme étant des absolus : les autres disciplines ne peuvent dès lors avoir de

(23) Fonder la morale exclusivement sur le savoir pourrait se réclamer de Socrate. M. Ferdinand Gonseth (Zürich) l'a récemment tenté, en ne considérant que le savoir scientifique, et en faisant état de ses importants travaux sur l'épistémologie des mathématiques.

consistance que celle que ces mêmes absolus sont aptes à leur communiquer.

Les critiques que nous formulons visent donc, dans la « réforme », la prétention à l'hégémonie, non l'aménagement positif en quoi cette réforme aurait pu consister. Elles n'en sont pas moins graves, dans l'immédiat. Mais elles n'excluent pas l'espoir d'une « sanatio in radice ». « Il n'y a ni mathématiques traditionnelles ni mathématiques modernes, la mathématique est une science continue »[1]. Pourquoi ne pas rendre cette vérité manifeste, même et surtout dans l'enseignement élémentaire ? Pourquoi supprimer, au lieu de compléter ? Pourquoi substituer ? alors qu'il fallait, dans ce qu'il convenait d'adjoindre, montrer à la fois l'irréductible appoint et la congénitale carence ? Ce dernier aveu ne nuirait en rien à la beauté du nouvel édifice, construit à partir de l' « ensemble » et de la « structure » au lieu de l'être à partir du nombre et du continu. Cet aveu constituerait en effet tout simplement la reconnaissance de la vérité ; et, ce qui est fort rassurant, d'une vérité que l'expérience a sans cesse réimposée. Le mathématicien ne crée ni ne définit celles des notions qu'il lui est loisible de choisir comme étant primitives ; il forge ces notions à partir de la réalité, et en demeurant radicalement subordonné à la réalité. C'est pourquoi, corrélativement, l'acte de la connaissance *même* « *proprement mathématique* » est en droit, et doit demeurer en fait, radicalement normé par l'art de raisonner, lui-même ordonné à la découverte de la vérité.

La représentation sensible.

La seconde des difficultés qui résultent de la prépondérance accordée à la représentation sensible par la « mathématique moderne » tient à ce que les réalités intelligibles, et les entités mathématiques, ne sont pas adéquatement représentables.

C'est, on le voit, un corollaire de la première difficulté. Qu'il faille, pour démontrer, « partir » d'une proposition tenue pour vraie, cela, *d'abord* se conçoit et se comprend. Ensuite, mais ensuite seulement, cela peut être signifié par des symboles d'ailleurs conventionnels ; cela, à proprement parler, ne peut être « représenté ».

Le « medium » qu'il faut découvrir pour démontrer, et qui pour ainsi dire concrétise dans chaque cas particulier l'*intuition du « donc »* en laquelle est fondé tout acte de raisonner, *d'abord* se conçoit et se comprend « fonctionnellement », c'est-à-dire en fonction de l'acte de raisonner. Le « medium » n'est certes pas étranger à la représentation sensible, parce que celle-ci peut constituer un instrument de découverte et un moyen d'expression. Mais le « medium », comme tel, n'est pas la représentation sensible qui lui correspond ; parce que, même dans l'ordre mathématique, il est d'essence intelligible [24].

(24) Rappelons, à titre d'exemple, le « problème du scrutin ».

Une élection met en concurrence deux candidats A et B. Des informations secrètes et personnelles permettent de prévoir que A aura la majorité relative, soit *m* voix, tandis que B aura *n* voix ($m > n$). On demande quelle est la probabilité pour que, tout au cours du dépouillement du scrutin, A ne perde jamais la majorité.

La probabilité cherchée est, selon la définition classique, le quotient de Nf par Np :

Nf = nombre des cas favorables.
Nd = nombre des cas défavorables.
Np = Nombre des cas possibles.
= Nf + Nd.

L'évaluation de Np est bien connue : $Np = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ C'est le calcul de Nf, ou de Nd, qui est facilité par la découverte du « medium » dont voici l'expression.

Les cas possibles sont constitués par des séries de bulletins : ABAAB...B assujetties à la seule condition qu'il y ait m fois A et n fois B. L'ordre de la série correspond à celui dans lequel le scrutin est dépouillé. Les séries qui commencent par un B sont défavorables, puisque A n'a pas la majorité lorsque le premier bulletin est dépouillé. Distinguons alors, parmi les séries (ou cas) possibles, trois catégories :

SB séries qui commencent par B.
S'A séries qui commencent par A et qui sont défavorables.
S"A séries qui commencent par A et qui sont favorables.

Le « medium » consiste en l'égalité :

NB = nombre des SB = nombre des S'A = N'A.

Il s'agit bien d'un « medium » de raisonnement, au sens propre. Car :

1) *Cette égalité rend aisée la suite du calcul.*

On a en effet, par définition de SB et de S'A : Nd = NB + N'A.
Et donc, d'après l'égalité « medium » Nd = 2 NB.

Or : $NB = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$

D'où $\frac{Nd}{Np} = 2\,\frac{n}{m+n}$

D'où enfin la probabilité cherchée : $1 - 2\,\frac{n}{m+n} = \frac{m-n}{m+n}$

Ce serait donc induire en erreur que de suggérer, de la mathématique, que tout y est représentable, ou bien qu'elle n'a pas d'autre objet que les symboles *eux-mêmes* dont la création n'a cependant été motivée que par la nécessité de représenter, symboles qui par le fait même ne seraient plus représentations de rien : chiffres, flèches, arbres, graphes... usurpant le statut des réalités dont, au vrai, ils sont seulement les signes.

Nous entendons bien que, pour les élèves de 6ᵉ, et même bien après, et même toujours, la représentation sensible demeure un support utile ou nécessaire. Mais, nous le répétons encore une fois, l'écueil qui guette les réformateurs ne se trouve pas impliqué dans ce qu'ils construisent effectivement ; l'écueil tient au fait d'affirmer, ou au niveau élémentaire d'insinuer, que certaines réalités sont auto-suffisantes alors qu'elles sont par nature subordonnées, ou bien que les symboles constituent la réalité alors qu'ils en sont seulement les signes. C'est mécon-

2) *Cette égalité peut être aisément établie.*

Qu'il s'agisse d'une SB ou d'une S'A, A perd la majorité et la retrouve ensuite. Il y a donc un *premier* moment du scrutin (et peut-être d'autres, mais pas nécessairement, et on ne les considère pas) où les deux candidats ont le même nombre de voix, c'est-à-dire où la partie de la série qui est déjà sortie à ce moment comporte un nombre de A et un nombre de B qui sont égaux. Par exemple, pour une SB : BBABAA.

Or, si, dans cette partie de cette SB, on remplace chaque B par un A et chaque A par un B, sans changer le reste (non écrit) de la série complète, cette SB :
premièrement, demeure une série défavorable, puisque pour la partie considérée (écrite) il y a égalité entre le nombre des A et le nombre des B, et non majorité des A ;
deuxièmement, devient *donc* une S'A, puisqu'elle est défavorable comme on vient de le voir, et puisqu'elle commence par un A au lieu de commencer par un B.

On verrait pareillement que la même substitution (A ⟶ B, B ⟶ A) convertit une S'A en une SB.

Il y a donc « bijection » de l'ensemble des SB sur l'ensemble des S'A, et réciproquement par conséquent (cf. p. 77).

Précisions maintenant ce qui a motivé le rappel de cet exemple. — La considération du graphe qui correspond à la question posée rend évidente sur le graphique, évidente sur la représentation sensible, la *preuve* de l' « égalité-medium ». Mais aucun graphe ne peut donner l'*idée* de ce « medium ». La découverte peut en être stimulée par le calcul, par la représentation, par l'observation... mais cette découverte du « medium » est, comme le « medium » lui-même, d'ordre *intelligible*, ordre irréductible à tout autre.

naître, en dépit de l'expérience, que les débutants eux-mêmes sont parfaitement capables de découvrir et de comprendre les données qui leur sont en un sens innées ; car, si elles ne l'étaient, elles leur demeureraient étrangères à jamais. Il convient, en usant certes de représentations, de viser à faire comprendre, dès la classe de 6e et même bien avant, qu'il existe des réalités « intelligibles » et qu'elles sont distinctes de leur représentation, que la représentation d'une telle réalité ne lui est jamais adéquate, et enfin que certaines réalités ne peuvent avoir aucune représentation sensible. L'enfant pressent ces vérités, confusément mais par connaturalité ; et, bien conduit, l'enseignement de la mathématique peut aider à les dégager et à en prendre conscience. Cela suppose évidemment que cet enseignement ne soit pas véhiculé dans une débauche de signes de laquelle la réflexion proprement intelligible ne peut éclore que fort difficilement, parce qu'elle demeure pour ainsi dire diluée dans la viscosité, alors que, difficile, elle devrait être mise en lumière d'une manière privilégiée.

2. La remise en question sous-jacente au bourbakisme s'étend, inéluctablement, aux notions subordonnées.

Nous entendons en l'occurrence par « subordonnées » les notions qui, sans laisser d'être essentielles, c'est-à-dire d'être intégrées à l'objet de la mathématique selon l'essence de celui-ci, ne sont cependant pas « primitives ». Elles sont impliquées par les notions primitives, soit au point de vue formel de la mathématique, soit au point de vue, plus général, de la connaissance. Dans un cas comme dans l'autre, elles sont conçues comme le sont les notions primitives elles-mêmes ; et elles ne peuvent pas l'être autrement.

Nous nous bornerons à considérer deux notions subordonnées particulièrement importantes : l'une est liée à la présentation des notions primitives au point de vue général de

la connaissance, et c'est l'*unité* ; l'autre se trouve immédiatement impliquée dans les notions primitives elles-mêmes, et c'est la *relation*.

A. La remise en question de l'unité.

La science tend, comme tout savoir, à s'unifier. L'expérience le prouve. La raison en est, radicalement exprimée, que la diversité absolue est contradictoire au point de vue de l'être, et partant pour l'esprit. L'esprit créé, en définitive, ne connaît qu'en adorant l'absolu ou en recherchant la cause ; ou bien, donc, il saisit l' « un », ou bien il y ramène le multiple. Ces normes, immanentes à l'acte de connaître, se réfléchissent dans la prise de conscience de cet acte et partant dans la conceptualisation qui en est l'expression, c'est-à-dire en tout savoir quelle qu'en soit la spécification. On peut encore observer que, l' « être » et l' « un » étant convertibles, un savoir n'est consistant que s'il est unifié, que s'il est un « certain ordre » auquel correspond d'ailleurs une « certaine sagesse ».

Ce n'est pas le lieu d'insister sur ces considérants. Nous les avons rappelés parce qu'ils expliquent, et même justifient, que les réformateurs, et notamment les plus pénétrants d'entre eux qui sont également les plus fidèles aux Bourbakistes de la première heure, insistent avec quelque complaisance sur la nécessité de substituer, au traditionnel pluriel, le singulier : non pas *les* mathématiques, mais *la* mathématique. Car ce savoir, qui est « un » en droit comme tout savoir, doit être signifié et exposé conformément à l'exigence de sa propre unité [25]. Cela est parfaitement légitime ; cela constitue même le symptôme d'un réalisme spontané, pour l'activité de l'esprit s'exerçant dans le domaine mathématique. Il convient donc d'autant plus d'examiner ce en quoi consiste en fait, selon les Bourbakistes, l'unité qu'ils revendiquent à bon droit pour *la* mathématique.

(25) « Les mathématiciens utilisent les mêmes concepts et le même langage dans toutes les branches : Il est légitime de parler, non plus des mathématiques, mais de la mathématique. » [13], 49.)
On comprend ainsi pourquoi les réformateurs savants n'ont guère de sympathie pour la locution « mathématiques modernes », barbarisme incongru dont les primaires répandent l'usage.

Les trois fondements de l'unité qui est propre à la mathématique.

Les théoriciens de cette unité distinguent pour celle-ci, et pour autant qu'on puisse le discerner clairement, trois fondements différents : lesquels ne sont d'ailleurs dégagés que dans les parties non formalisées des exposés bourbakiens. On n'en est pas surpris. Mais, dans ces conditions, nous croyons utile, pour la clarté de ce qui suit, de donner respectivement à chacune des désignations proposées pour ces fondements, la portée précise que nous allons expliciter.

« Les mathématiciens utilisent les mêmes concepts et le même langage dans toutes les branches »[25]. Il suffit de parcourir un exposé moderne, élémentaire ou savant, pour observer que cette affirmation autorisée correspond effectivement à la réalité. Voilà donc, pour la mathématique, deux fondements de l'unité.

Nous dirons que l'*identité du langage* constitue le *fondement formel* de l'unité. Cette dénomination s'explique d'elle-même, puisque précisément ce langage « utilisé dans toute les branches » tend de plus en plus à devenir un langage « formalisé ».

Nous dirons que l'*identité des concepts* constitue le *fondement conceptuel* de l'unité. Et nous faisons observer que « conceptuel » n'est pas synonyme d' « irréel » : contrairement à ce qu'admettent inconsidérément trop de nos contemporains, notamment les théologiens.

« S'il arrive toujours un moment où le développement de la mathématique nouvelle conduit à une complexité redoutable des concepts maniés, la mathématique sait maintenant, en suivant l'intuition profonde de Galois, refaire du simple, en prenant comme éléments ces échafaudages compliqués... » ([13], 51). « L'idée simple est un geste intellectuel, et elle a toute la grâce et l'efficacité du geste réussi » ([13], 50).

Nous dirons que l'*idée simple* constitue le *fondement réel* de l'unité. On voit en effet que l'idée est dite « simple », en ce sens qu'elle ordonne entre eux les concepts ; elle permet ainsi d'en dominer la multiplicité dans une saisie simultanée, elle est facteur réel de l'unité.

On ne peut que reconnaître le bien fondé des désignations proposées. Toujours en effet l'existence des trois fondements a

été reconnue, bien que jamais elle n'ait été dégagée, étudiée et systématiquement mise en œuvre comme *la* mathématique moderne a réussi à le faire. On reconnait également que le fondement formel et le fondement conceptuel sont étroitement connexes ; au moins à certaines conditions sur lesquelles nous reviendrons, il est clair qu'un concept nouveau, c'est-à-dire un concept « à l'état natif », implique un nouveau mode d'expression [26].

Mais, en retour, on doit observer que, si l'on compare la présentation traditionnelle et la présentation « moderne », le rapport qui existe entre le concept et l'idée se trouve, d'un cas à l'autre, inversé. Nous allons le montrer d'une manière précise, en considérant un cas particulier.

L'unité qui est propre à la mathématique est considérée dans un cas typique. L'ensemble N des entiers naturels, et l'ensemble Z des entiers rationnels.

Lorsqu'une opération est effectuée sur des nombres, *l'opération joue le rôle de l'idée et le nombre celui du concept* ; car une telle opération est un *acte*, et l' « idée simple est un geste intellectuel » ([13], 50), ou plus précisément l'expression d'un *acte* de l'esprit [27]. Cela étant, rappelons que les différentes catégories d'entiers et puis de nombres « non naturels » ont été créées pour rendre possibles, en des cas où elle ne l'est pas avec

(26) « On entend protester aussi contre l'introduction de termes nouveaux. Elle est évidemment désagréable pour ceux qui les ignorent : il est malheureusement impossible d'introduire des idées nouvelles sans introduire de nouveaux mots. » ([13], 63.)

M. Revuz a évidemment raison. Nous faisons cependant observer que, conformément au vocabulaire qu'il emploie lui-même, les mots correspondent directement aux concepts ; ils correspondent aux idées seulement par l'intermédiaire des concepts.

(27) Le « fondement réel » est donc un *acte-idée* : la simplicité qui appartient à l'acte par nature, appartient également à l'idée qui spécifie l'exercice de l'acte. C'est pourquoi l'idée est, à bon droit, déclarée « simple » par M. Revuz. Nous désignerons dans ce qui suit, par la locution « acte-idée » placée entre guillemets, le type propre du « fondement réel ». La même locution sera employée, dans chaque cas particulier, sans guillemets, mais accompagnée d'un déterminatif qui en précisera l'application.

les entiers naturels, telle opération, *cette opération demeurant comme telle inchangée.* Que l'effectuation concrète d'une « soustraction » requière ou non l'usage des « entiers négatifs », *l'acte et l'idée de soustraire sont les mêmes, dans un cas comme dans l'autre.*

C'est d'ailleurs cette *permanence* de l'acte-idée qui permet de *passer* d'un concept déjà connu (entier naturel) à un concept nouveau (« entier négatif »). Si, mis aux prises avec une « soustraction » impossible en utilisant les entiers naturels, l'esprit renonçait à l'acte-idée de soustraire, il pourrait peut-être créer quelque chose, mais il ne créerait pas un nouveau type d'entier. Car seule l'immutabilité de l'idée, qui est expressive de l'acte de soustraire, fonde de concevoir l' « entier naturel » et l' « entier négatif » comme étant également des « entiers ». Tout cela fut et demeure communément admis, après la « réforme » comme avant.

Voici maintenant ce en quoi consiste la différence, et en un sens l'opposition, entre l'ancien et le moderne.

La présentation « traditionnelle » de l' « entier négatif » consistait à référer *directement* celui-ci à l'acte-idée de soustraire. Voici comment.

On estimait, premièrement, que l'acte de nombrer fonde intuitivement la réalité de l' « entier naturel », lequel est le premier type de nombre, le nombre par antonomase pour ainsi dire. Et donc on estimait que le même acte de nombrer fonde réflexivement, c'est-à-dire par réflexion de l'intelligence en acte de nombrer, sur l'acte qu'elle pose, *l'idée* de nombre « entier naturel ». Or l'acte de soustraire est, dans l'ordre même de l'acte, une sorte de réciproque que l'acte de nombrer contient immanente à lui-même. « Nombrer », c'est en effet coordonner une nouvelle unité avec un ensemble considéré comme un tout, lequel peut d'ailleurs être l'ensemble vide ; et par conséquent, comme l'observa Poincaré, « nombrer » c'est déclarer : après ce nombre il y en a un autre.

Or, en l'acte même où l'esprit déclare : « après ce premier nombre il y en a un second », il déclare également « avant ce second nombre, il y en a un premier ». Le même jugement, porté par l'esprit en acte, comporte nécessairement deux formulations réciproques l'une de l'autre. L'une (ce second nombre après ce premier nombre) correspond à une coordination ; elle décrit l'acte de nombrer. L'autre (ce premier nombre avant ce second nombre) correspond à la désintégration qui détruit la

coordination ; elle décrit l'acte de soustraire. L' « acte » de soustraire se trouve ainsi caractérisé, *quant à sa nature* ; et cela, *indépendamment* des « concepts » dont il peut exiger la création [28].

Cela étant, *on estimait, deuxièmement, que l'acte de soustraire fonde intuitivement la réalité de l' « entier négatif »*, tout comme l'acte de nombrer [29] fonde intuitivement la réalité de l' « entier naturel ». Et on estimait que le même acte de soustraire fonde réflexivement, c'est-à-dire par réflexion sur l'acte qu'elle pose, de l'intelligence en acte de soustraire, l'*idée* de l' « entier négatif » : tout comme l'acte de nombrer fonde réflexivement l'idée de l' « entier naturel ».

En un mot, l'épistémologie « traditionnelle » consistait, en mathématiques, à fonder la *réalité propre* du nombre *mathéma-*

(28) Nous soulignons le mot « indépendamment », en vue de manifester plus clairement le point de vue auquel nous nous plaçons. On pourrait en effet objecter que l'acte de soustraire se heurte à une impossibilité si on tente de l'effectuer en utilisant les entiers naturels et en prenant « zéro » comme origine de l'acte. C'est précisément cette impossibilité qui exige la création de l' « entier négatif ». Mais cette impossibilité vient de ce qu'on cherche à effectuer l'acte de soustraire dans des conditions « abstraites ». Et nous entendons par « abstraites » des conditions qui sont différentes de celles dans lesquelles l'acte est donné concrètement, et par conséquent observé conformément à sa nature.

L'acte de soustraire, concrètement exercé, est en effet, dans l'ordre même de l'acte, la réciproque que l'acte de nombrer, lui-même concrètement exercé, contient immanente à lui-même. Or l'acte de nombrer *concrètement exercé*, celui donc qui résulte de l'appréhension intelligible d'une multiplicité objective, que celle-ci soit sensible ou mentale, en tel acte n'aboutit jamais à « zéro ». Autrement dit, le nombre que l'esprit en acte déclare être « après » (le nombre déjà atteint) n'est jamais « zéro » ; il est « un », ou « deux », etc. Il y a donc toujours dans un acte de nombrer concrètement exercé, un nombre qui est « avant » ; même si ce nombre, étant zéro, n'est en l'occurence « nombre » que fonctionnellement. Il s'ensuit que, considéré au concret, en tant qu'immanent à l'acte concret de nombrer, l'acte de soustraire se trouve caractérisé indépendamment des cas auxquels on peut chercher, *ultérieurement*, à en étendre l'effectuation. Il n'y a pas de contradiction à définir l'acte de soustraire, sans faire état de l'impossibilité que l'on rencontre si, en employant seulement les entiers naturels, on cherche à l'effectuer à partir de « zéro ».

(29) L'acte de l'esprit qui nombre, requiert lui-même une multiplicité objective. Nous l'avons rappelé ci-dessus dans le texte (voir 2 A, 1 ; pp. 20, 21), et de nouveau dans la note 28.

tique sur celle de l'*acte* de l'esprit en acte de nombrer ; et à considérer l'*idée* de nombre comme résultant de la réflexion de l'esprit sur son acte. On voit donc que dans cette perspective, « traditionnelle », et conformément au vocabulaire ci-dessus précisé, le fondement réel de l'unité, l' « acte-idée », joue son rôle en ceci qu'il fonde lui-même l'unité du fondement conceptuel, et ultérieurement du fondement formel. Ainsi, l'*unité procède de l'acte*. C'est vrai absolument ; la mathématique traditionnelle le retrouve, pour son propre compte, spontanément.

Les Bourbakistes objectent que la notion d' « entier négatif » ainsi introduite manque de rigueur quant à la présentation, et surtout qu'elle n'est pas même une notion mathématique. Et si on consulte par exemple Evariste Dupont [30], on observe que la locution « entier négatif » apparaît seulement, au titre de convention de langage, à la dernière page du ch. 8, consacré à la soustraction et à « l'ensemble Z des entiers rationnels ». Cet ensemble Z est créé afin de rendre l'acte de soustraire toujours possible, quels que soient les deux nombres naturels à partir desquels cet acte est effectué ; en cela, rien de nouveau.

Le nouveau consiste en la manière de définir l'ensemble Z et les opérations sur les éléments de cet ensemble ; il consiste surtout, au point de vue auquel nous nous plaçons, en l'inférence qui permet de « passer » de l'ensemble N des entiers naturels à l'ensemble Z des entiers rationnels. Le « medium », car toute inférence en comporte un, est constitué par l'*invariance formelle* de la définition et des propriétés d'opérations (addition, multiplication) qui, supposées caractérisées dans N où elles ont pour base les entiers naturels, sont ensuite « généralisées » par *analogie* et étendues à Z, où elles ont pour base des éléments plus complexes puisque chacun de ces éléments est constitué par un couple de deux entiers naturels.

Nous excuserons-nous de cette longue phrase ? Il nous paraît difficile de récapituler d'une manière plus concise et aussi précise les vingt-neuf pages qu'Evariste consacre à cette question. Les locutions que nous avons soulignées « invariance formelle », « analogie », ne figurent pas dans le chapitre auquel nous nous référons. Elles ne laissent cependant pas d'en décrire l'enchaînement. En effet, il s'agit bien d'une analogie

(30) Il s'agit d'un pseudonyme. Evariste signifie Galois, et Dupont le « pédagogue moyen ». Excellent traité d'ailleurs [14], dont l'auteur est bien connu. Nous respectons son anonymat.

dont l'*unité* consiste en une invariance formelle, et dont la *diversité* tient à une complexité accrue. Est-il « légitime » ou « valable » ou ... *arbitraire* de procéder de cette manière ? Est-ce bien « mathématique » ? Nous posons ces questions, simplement pour faire observer aux Bourbakistes que, s'ils ont jugé nécessaire de reculer plus avant la justification des fondements, ils s'exposent par le fait même à ce que leur démarche soit estimée insuffisante.

Laissons de côté cette difficulté, célèbre, difficulté de la « nécessité de s'arrêter », et considérons telle qu'elle se présente l'inférence qui fait passer de l'ensemble N des entiers naturels à l'ensemble Z des entiers rationnels. Et comme nous examinons le rôle joué par l'idée et par le concept en tant que fondements de l'unité, deux observations, respectivement, s'imposent. La seconde d'ailleurs est conséquence de la première.

Premièrement l'acte-idée de soustraire, fondement concret et immédiat de l'entier négatif dans la présentation « traditionnelle », est et doit être absent de la présentation moderne.

L'acte de soustraire est, à dire vrai, mentionné au début, afin de donner un contenu intuitif, et pour autant de justifier, la notion de « différences équivalentes », mais il est aussitôt ramené à un « concept » : celui de l'ensemble ou du sous-ensemble constitué par de telles différences équivalentes entre elles. L' « acte-idée » est donc, dans cette présentation, un présupposé utile ; mais c'est un présupposé pré-mathématique, lequel ne doit plus intervenir dans les définitions opérationnelles qui concernent l'ensemble Z des entiers rationnels. Et, effectivement, ces définitions sont construites exclusivement à partir de l'addition et de la multiplication supposées caractérisées dans l'ensemble N des entiers naturels. L'acte-idée de soustraire justifie bien, a posteriori pour ainsi dire, toute la démarche ; mais comme une fin justifie, sans pour autant l'inspirer, le moyen auquel elle demeure hétérogène. Et il est exclu que l' « acte-idée » intervienne organiquement au cours de l'inférence dont N est l'origine et Z le terme, parce que cet ensemble Z des entiers rationnels ne doit avoir pour fondements proprement mathématiques que l'ensemble N des entiers naturels et l'inférence elle-même ; l' « acte-idée » étant de nature intuitive, ne peut être qu'un répondant pré-mathématique.

Deuxièmement, et en conséquence de ce qui précède, l'inférence elle-même, analogie dans l'invariance formelle, porte sur des « concepts » et non sur des « actes-idées ».

Quoi qu'il en soit en effet de la nature des opérations définies dans l'ensemble N des entiers naturels, question sur laquelle nous allons revenir immédiatement, l'inférence (qui fait passer de N à Z) consiste à composer ces opérations, soit entre elles, soit chacune avec elle-même. Or, comme on ne compose pas *concrètement* deux actes différents, l'inférence a pour effet de résorber en « concepts » abstraits les opérations qui, originairement, étaient des « actes », ou du moins pouvaient l'être.

On doit donc conclure, si on analyse avec quelque rigueur la présentation « moderne » de l'entier négatif :

Que, premièrement, cette présentation « moderne » est beaucoup meilleure, si on se place au point de vue de la cohérence rationnelle, et donc quant à l'unité *conceptuelle,* que celle dont elle tient la place ; l'entier négatif est introduit par généralisation homogène, à partir de l'entier naturel, sans solution de continuité au point de vue sémantique, et sans qu'il soit besoin de recourir à la réflexion métaphysique.

Que, deuxièmement, l'irréductible rançon de cet indéniable bénéfice est l'éviction, complète, de l'acte au profit du concept ; l'unité entre l'ensemble N et l'ensemble Z, entre l'entier « naturel » et l'entier « négatif », ne procède donc pas d'un « acte-idée » ; cette unité tient au savant agencement de concepts qui, s'ils dérivent il est vrai d'un « acte-idée », ne peuvent, par le fait même qu'ils en sont seulement dérivés, en avoir la simplicité.

Que, troisièmement, l'entier négatif se trouve ainsi caractérisé au point de vue de l'extension et de l'opération : précisément par la construction de l'ensemble Z des entiers rationnels et par les opérations généralisées dont les éléments de cet ensemble constituent la base. L' « entier négatif », pure dénomination, n'est pas et ne peut pas être caractérisé formellement « en compréhension ». C'est d'ailleurs cela que les Bourbakistes ont dessein de rejeter hors la mathématique, en même temps que tout recours à l'intuition. Et c'est bien cela qu'ils font, qu'ils le déclarent ou non [31]. Nous ne voyons pas qu'ils y

(31) « Les mots [extension compréhension] appartiennent à la langue philosophique plutôt qu'à la langue mathématique, et il n'y a pas lieu de s'attarder sur cette distinction. » ([9], 5.)

Certains Bourbakistes sont plus condescendants dans leurs expressions. Mais, en fait parce qu'en droit, la mathématique « moderne » caractérise les notions dont elle fait usage par l'extension. Nous l'avons déjà observé pour la notion primitive d' « ensemble ». Nous le verrons également pour la notion dérivée de « relation ».

réussissent parfaitement, parce que d'ailleurs c'est impossible. Mais, dans la mesure où l'entreprise s'impose comme étant une réussite, elle a pour conséquence de présenter d'une manière autorisée une mathématique *coupée* d'avec la réalité et d'accréditer pour autant un nominalisme erroné.

L'unité de la mathématique moderne procède du concept plutôt que de l'acte.

La mathématique « moderne » est un édifice trop cohérent pour que les tensions observables dans la superstructure ne se trouvent déjà dans le fondement. Poursuivons donc, en remontant d'ailleurs le cours d'un exposé Bourbaki, l'examen de notre question. D'où vient en fait l'unité ? Est-ce vraiment, comme on le déclare de l' « acte-idée » ? N'est-ce pas, bien plutôt, du « concept », dont l'univocité aisément appréhendée voile et risque d'usurper la véritable simplicité qui est propre à l'idée ?

Les auteurs, qui visent à mettre en évidence l'unité qu'acquiert la mathématique du fait de son orientation « moderne », se réclament de Galois et de Cantor, dont ils associent les noms avec quelque complaisance ([2], 10). Or, si Galois (1811-1832) et Cantor (1845-1918) sont des « modernes » eu égard à l'époque, leurs situations respectives sont fort différentes l'une de l'autre, voire même opposées, en ce qui concerne la « mathématique moderne » et très particulièrement la nature de son unité.

« La mathématique sait maintenant, en suivant l'intuition profonde de Galois, refaire du simple, en prenant comme éléments ces échafaudages compliqués. » ([13], 51.) Oui, c'est bien ce que fit Galois. Et le « simple » ainsi réinstauré procéda effectivement d'une « idée ». Cette « idée », génériquement, consiste en ceci : on rend simple ce qui est complexe en l'ordonnant, en en faisant « un ordre ». Et cette « idée » est, en l'occurrence, que le principe fondant l'ordination des racines d'une équation, est constitué par un groupe de substitution. Le « complexe » est donc ici un « donné », savoir l'équation et ses racines. Pour comprendre ce « donné » complexe, il faut l'ordonner, ce qui revient à en découvrir le principe d'unité. L' « idée » est d'abord objet de découverte, et c'est la phase ascendante de l'induction. Ensuite, et c'est la phase descendante, l' « idée » devient un « acte-idée », celui-ci constituant effec-

tivement et efficacement le principe de l'ordre et de l'unité. Ce schéma simple, *naturel*, est celui de la découverte, géniale tout le monde en est d'accord, de Galois. Le « complexe » n'est donc pas « fabriqué », il est un « donné ». Le « groupe de substitution » est, comme tel, un « concept » ; car, s'il peut et doit être étudié en lui-même, il ne constitue, dans la perspective d'ensemble, réaliste et concrète au point de vue mathématique, de Galois qu'un instrument. Le « fondement réel » de l'unité est bien, dans cette même perspective et selon l'heureuse expression de M. Revuz, un « acte-idée » : non pas les « concepts », ou la conceptualisation, qui correspondent à cette idée, mais l'*idée qui spécifie l'acte* de l'esprit lorsque celui-ci est aux prises avec la réalité, avec un « donné ». Voilà Galois.

Cantor procède tout autrement. Le lecteur le comprendra par un exemple.

Les traités élémentaires de « mathématique moderne » proposent une définition nouvelle de la multiplication. Les deux facteurs du produit étant bien entendu considérés comme des ensembles, la définition « traditionnelle » apparaît bien encore sous la forme du « produit cartésien » de ces deux ensembles; et c'est d'ailleurs cette définition qui en fait est mise en œuvre par les machines à calculer. Mais le produit est maintenant défini comme étant le nombre cardinal de l'ensemble qui est le produit cartésien [57] des deux ensembles dont les deux facteurs (du produit) sont respectivement les nombres cardinaux (Cf [9], classe de 6e, 194). Or c'est Cantor qui a donné, équivalemment, cette définition, et pareillement celle de l'exponentiation. Et cela, en vue d'étendre au transfini des opérations que leur définition « traditionnelle » circonscrivait dans le fini. Le procédé est évidemment légitime, au même titre que la généralisation. Mais il correspond, nous l'allons voir, à un cheminement mental qui n'a rien de commun avec celui que suivit Galois.

La comparaison exige de considérer premièrement ce sur quoi on opère, deuxièmement la manière d'opérer.

Il convient dès lors d'observer en premier lieu que le transfini est une pure création de l'esprit. Il est, au vrai, de l' « indéfini », qui ne doit d'être du « déterminé » qu'à un décret en fait non rigoureusement justifié ; c'est-à-dire que l'esprit choisit de considérer comme étant objectivement déterminées des entités qu'il ne perçoit pas dans la réalité sensible, et que lui-

(57) Voir p. 97.

même ne réussit pas à appréhender comme étant déterminées [32]. Le transfini est donc, de par son origine et de par sa nature, indéfiniment complexe. Galois part d'un « donné » objectivement déterminé, et complexe, Cantor se donne à lui-même de l' « indéfiniment complexifiable ».

Cette première différence, qui concerne ce sur quoi on opère, et à partir de quoi il s'agit de « refaire du simple », n'acquiert toute son importance que parce qu'elle constitue le conditionnement d'une seconde différence, laquelle concerne le mode et non plus seulement la « matière » de l'opération. Cantor, lorsqu'il définit d'une manière nouvelle la multiplication ou l'exponentiation, ne découvre pas à proprement parler une nouvelle idée. Il *conçoit* d'une manière nouvelle la réalisation de la même chose, savoir l'effectuation de la multiplication ou de l'exponentiation ; et cette manière nouvelle de concevoir ne procède pas de l'idée, elle tient à ce que l'idée doit être appliquée dans des conditions qui sont nouvelles. Ce qui donc, en l'occurrence, est inventé et se présente comme nouveau, s'il réalise une certaine unité entre la multiplication dans le fini et la multiplication dans le transfini ne le doit pas en propre à l'idée elle-même, mais à la manière d'en concevoir l'application. Le fondement propre de l'unité est un « fondement conceptuel », non un « fondement réel ».

(32) L'esprit cherche donc à transcender son acte. Mais c'est en projetant et en objectivant cet acte même dans un univers purement formel ; un univers dont il est impossible de savoir avec certitude s'il a ou s'il n'a pas de rapport soit avec la réalité sensible soit avec la réalité mathématique non transfinie. Ce n'est pas le lieu de discuter cette question, au sujet de laquelle s'affrontèrent au début de ce siècle Borel Lebesgue et Hadamard. Signalons simplement que M. le Professeur Dieudonné, l'un des premiers Bourbakistes est, sur ce point, « borélien » : c'est au « dénombrable » qu'il faut se référer. Et Mlle L. Félix observe justement que « l'axiome du choix est non dominé. On cherche à redémontrer sans lui ce qu'on a démontré avec lui ». ([12], 51.)

Ce qui importe à notre point de vue, c'est que la « complexité » du transfini n'est pas de même nature que celle du « donné » qu'ont considéré Galois, ou d'autres soit avant soit après lui. Et cela, parce que le transfini est, nous le répétons, une *pure* création de l'esprit. Toute entité mathématique est, il est vrai, une création de l'esprit ; mais une telle entité peut soutenir, soit avec la réalité sensible soit avec l'acte même de l'esprit, un rapport *concret* de signe à signifié ; rapport concret qui n'existe pas dans le cas du transfini, puisque celui-ci, ni n'est observable comme tel dans la réalité sensible, ni ne peut être l'objet d'un acte de l'esprit qui lui serait adéquat.

On retrouve donc, à propos de la multiplication dans l'ensemble des entiers naturels, comparés en ses deux cas fini et transfini, la conclusion même à laquelle conduit, nous l'avons vu, la comparaison de l'ensemble N des entiers naturels et de l'ensemble Z des entiers rationnels. Cette conclusion peut s'énoncer comme suit. L'unité, réalisée soit par définition soit par construction entre les deux éléments comparés, tient à l'univocité d'une manière de concevoir, non à la simplicité d'une idée. L'unité a pour fondement propre un « fondement conceptuel » qui seulement dérive de la mise en œuvre d'une idée ; l'unité est privée du « fondement réel » que seul peut constituer l'idée elle-même, l' « acte-idée ».

La démarche mentale de Cantor, ou celle « du » Bourbaki [33], n'est donc ni de la même nature ni du même degré que celle de Galois.

On dira que Galois prospecte seulement une partie ; tandis que le tout est à peine assez pour Bourbaki ! C'est *vrai.* Mais cette observation recule simplement, sans la résoudre, la question que pose l' « unité » de *la* mathématique, ou d'ailleurs de toute discipline particulière. Nous y reviendrons à la section suivante, en nous plaçant au point de vue métaphysique. C'est seulement lorsque l' « acte-idée » est l' « être en tant qu'être », que l'unité dont cet « acte-idée » est le fondement, et s'étend universellement, et aussi est parfaite qualitativement. Dans les autres cas, ou bien l'idée est parfaite dans son ordre si elle est la spécification immanente d'un acte-idée (Galois) ; ou bien l'idée doit, pour s'étendre à tout cet ordre, n'être plus que du type « conceptuel » voire même du type « formel » (Bourbaki). Que la définition cantorienne de la multiplication se présente comme in-naturelle ; que, par voie de conséquence, l'unité entre les deux cas fini et transfini de la multiplication soit du degré « conceptuel », ne nous surprend donc pas. Cela vient évidemment de ce que le transfini est une pure création de l'esprit ; mais cela, également, correspond aux normes générales que l'on découvre pour l'unité en considérant les différents types de savoir.

Nous ne critiquons donc pas Bourbaki de ne réaliser, pour *la* mathématique, qu'une unité de seconde qualité. Car nous estimons que, si on entend considérer *toutes* les mathématiques,

(33) Nous ne disons pas celle de tel mathématicien, en fait bourbakiste... à ses heures.

il n'est guère possible de les unifier mieux que ne fait Bourbaki. Mais nous « contestons » que le bourbakisme constitue l'unique manière de concevoir la nature du « mathématique comme tel », et par suite de concevoir l'unité de la mathématique. Et nous faisons observer qu'en prétendant à cet exclusivisme, le bourbakisme s'écarte de cette « liberté de l'esprit » qu'il revendique contre le « traditionalisme » et nourrit en lui-même le germe de son auto-destruction. Le déclin commence en effet, pour une systématisation, au moment où elle s'érige, en fait, en norme de la vérité : à plus forte raison si elle le prétend en droit et absolument. Les cadavres ne manquent pas ; ils n'instruisent personne, parce que nul ne les regarde. C'est vrai, même au vaste cimetière annexé à l'entreprise philosophique.

B. La remise en question de la relation.

La remise en question qu'implique le bourbakisme s'étend, nous venons de le voir, à la notion d'unité. Elle concerne également une autre notion, essentielle en mathématique et d'ailleurs en maints autres domaines, savoir celle de « relation ». Le processus est le même que dans le cas de l'unité ou des notions primitives ; il se présente cependant d'une manière plus simple parce qu'il s'agit d'une donnée particulière et par conséquent circonscrite.

La présentation de la relation dans les exposés Bourbaki.

Cette sorte de réalité concrète qui est communément désignée par le mot « relation », par exemple la relation de paternité, apparait dans les traités « modernes » à titre de point de départ. En cela, rien que de fort naturel. Ensuite, il faut passer de ce stade, pré-mathématique tout le monde l'admet, à la définition mathématique de la relation. L'intermédiaire est constitué par une image, à laquelle se trouve encore associé, au moins possiblement, un certain contenu intuitif : la relation est assimilée à une flèche, ou plus exactement à un « ensemble de

flèches » [34]. Enfin, et c'est le troisième stade, cet « ensemble de flèches », tout en demeurant un ensemble et précisément l'ensemble en quoi consiste *la* relation, n'est plus un ensemble « de flèches » ; il devient un ensemble de ... ? Les Bourbakistes ne disent pas de *quoi*. Citons, pour ne pas trahir, du moins nous l'espérons.

« *a*) Pour parler d'une relation entre l'être x et l'être y, nous devrons préciser de quels ensembles X et Y, non nécessairement distincts, x et y sont respectivement éléments. Cette exigence est facilement satisfaite pour les relations de parenté (X = Y = ensemble des êtres humains, ou X = ensemble des hommes d'un pays, Y = ensemble des femmes d'un pays...) ... Plus haut, nous avons parlé de « couples d'éléments ». Nous reprenons le terme en mathématique. Nous parlerons du couple (x, y) constitué par un élément de x de l'ensemble X et un élément de y de l'ensemble Y. x peut être appelé premier élément du couple, et y deuxième élément du couple ([13], 40) ... On appelle produit cartésien des ensembles X et Y et on note X et Y l'ensemble des couples (x, y) où x décrit X et y décrit Y.

b) Notre seconde exigence s'énonce alors : Une relation n'aura droit de cité en mathématiques [le pluriel est ici employé, probablement par inadvertance] que, si, pour tout couple (x, y), la réponse à la question : ' le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ? ' ne peut être que oui ou non... Remarquons que cette deuxième exigence est parfaitement satisfaite pour les relations de parenté » ([13)], 41).

On voit donc que le paragraphe *a*) précise exclusivement les deux propositions suivantes :

p) Le premier élément x du compte (x, y), décrit l'ensemble X auquel il appartient ;

q) Le second élément y du couple (x, y), décrit l'ensemble Y auquel il appartient ;

(34) « Au point où nous en sommes, j'ai bien envie de dire : une relation c'est un ensemble de flèches. » ([14], 55.)

On notera que l'utilisation de l'image (la flèche) est strictement subordonnée à la perspective ensembliste. « La relation », ce n'est pas « une » relation ; ce n'est pas « une » flèche. La relation c'est un *ensemble* de flèches. Cela découle d'ailleurs logiquement et inéluctablement du postulat bourbakien. En effet, chacun des deux termes qui constituent les extrêmes de ce qu'on appelle communément *une* relation, chacun de ces deux termes singuliers donc, ne peut, selon Bourbaki, exister que comme éléments d'un *ensemble*. « Une » relation, ou « une » « flèche », n'existe pas

p) et q) sont donc les conditions « pour [qu'on puisse] parler d'une relation entre l'être x et l'être y ». Et puisqu'il s'agit seulement des conditions d'existence de la relation, il n'est pas anormal que le mot « relation » ne soit pas encore défini.

Mais on attend évidemment qu'il le soit au paragraphe *b*). Or, ce second paragraphe ne fait qu'énoncer une seconde « exigence » : « Une relation n'aura droit de cité que si... » On attend donc, derechef, que soit définie cette entité qui doit avoir une certaine réalité puisqu'on en énonce des conditions de possibilité, et qui doit être originale et irréductible puisqu'elle est désignée par un nom propre et nouveau, savoir : « relation ». Mais l'exposé ne donne à cet égard aucune autre précision que l'énoncé de la seconde des conditions, celle qui est indiquée en *b*). Cet énoncé, le voici :

« La réponse à la question : « le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ? » ne peut être que oui ou non. »

Or, on ne trouve dans cet énoncé aucune définition de la « relation ». Par contre, supposé qu'on demeure lucide, on est fort surpris d'observer que le mot « relation » figure dans ce même énoncé. C'est-à-dire que ce mot, *encore non défini en fait figure au lieu et place où sa définition devait être explicitée.* Cela rend *impossible en droit* qu'il soit défini. Et cela rend compte de ce que, récapitulant ces deux paragraphes *a*) et *b*), on soit aux prises avec une tautologie, plus précisément avec la définition non prédicative[35] que voici. Une relation « a droit de cité »...

davantage que « un » élément. « Au commencement, est l'ensemble... » *La* relation est un *ensemble* de flèches. Ainsi l'image de la flèche paraît, comme telle, véhiculer un certain contenu intuitif ? Mais elle est immédiatement interprétée de manière à introduire une « définition » purement ensembliste, estimée elle seule être proprement mathématique.

(35) Poincaré a appelé « prédicative » la définition dans laquelle le « definiens » peut être légitimement le *prédicat* du « definiendum », et donc ne le contient pas. La définition non prédicative est celle dans laquelle figure le terme que précisément elle est censée définir, et qu'à cause même de cela, elle ne peut en réalité définir.

Dans ce qui suit, nous désignerons par (D) cette définition proposée pour la relation.

La relation est une entité dont la compréhension est difficile. Car l'esprit humain, conditionné en son exercice par les sens, considère d'abord chaque chose comme étant *un* « sujet ». Or la relation comporte deux extrêmes, deux « sujets ». Il ne sera donc pas inutile de montrer en quoi consiste le vice de la définition (D), sur un exemple dans lequel la difficulté adventice que constitue la com-

(existe ?) en mathématique, si « la réponse à la question ' le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ?' est oui », (pour un certain sous-ensemble de ces couples) [36]. En d'autres termes, une relation existe en mathématique, si certains couples vérifient cette relation. Cela ne peut qu'être vrai ! Mais cela ne donne aucune définition, pas même descriptive, de ce qu'est la relation « en mathématique ».

préhension de la relation, ne se superpose pas à la difficulté propre que constitue la non prédicativité de (D).

Nous conserverons donc, avec une rigoureuse exactitude, la structure de l'énoncé (D). Mais nous supposerons qu'il s'agisse de définir « pomme » au lieu de définir « relation » ; et nous remplacerons donc, dans (D), « relation » par « pomme ». Dès lors, il faut évidemment remplacer « couple » par une entité qui doit jouer, à l'égard de « pomme », le même rôle que « couple » par rapport à relation. Or le couple peut enclore une relation sans être lui-même une relation. L'entité qu'il convient de substituer à « couple » peut donc être : « élément de l'ensemble des arbres fruitiers et de leurs fruits ». Il y a des éléments de cet ensemble qui « vérifient » d'être « pomme », comme il y a des « couples » qui « vérifient la relation. ».

Etant donc supposé que (D) définit « relation », on doit obtenir une définition de « pomme » en remplaçant dans (D) : « relation » par « pomme », et « couple » par « élément de l'ensemble des arbres fruitiers et de leurs fruits ». Voyons plutôt. Le résultat de cette transposition est le suivant.

La pomme est le sous-ensemble des éléments de l'ensemble des arbres fruitiers et de leurs fruits pour lesquels [lesquels = éléments] la réponse à la question : « cet élément [sous-entendons : de l'ensemble des arbres fruitiers et de leurs fruits] est-il une pomme ? » est « oui ».

Or, si la réponse à la question posée est « oui », l'élément ainsi distingué des autres éléments pour lesquels la réponse à la même question serait « non », cet élément donc est une pomme.

Donc :

La pomme est le sous-ensemble des pommes.

C'est plus fort que tous les « jeux » qui doivent, dès la maternelle, éduquer et développer le goût du langage précis. Evariste, qui ne manque pas d'humour — et c'est fort heureux — est prestidigitateur à ses heures. En reprenant telle de ses tournures savoureuses, on pourrait insérer dans le traité de la relation un paragraphe intitulé : « Quand je [Evariste] change une pomme en une multitude de pommes ». Les cerveaux les plus rebelles saisiraient immédiatement de quoi il s'agit.

(36) Nous restituons la clause « pour un certain sous-ensemble de ces couples ». Cette clause est explicitée en ([14], 68).

Une relation est donc conçue, selon ces exposés, comme un triplet

Le bourbakisme ne peut cependant ni professer ni réaliser un nominalisme absolu, lequel serait d'ailleurs contradictoire. Si on emploie un mot nouveau, on entend signifier par lui une réalité nouvelle. Qu'est-ce donc que la « relation » ? « Un ensemble de flèches » ? On a fort envie de le croire, tout comme Evariste « a bien envie de le dire »[14]. Mais comme il est impossible de savoir si Evariste le dit ou ne le dit pas, et comme Evariste lui-même insiste avec vigueur sur le fait qu'en authentique mathématique la question de l'existence se résout exclusivement en décidant l'alternative « *soit* oui, *soit* non » d'une manière objective et catégorique[15] laquelle est incompatible avec la modalité subjective et aléatoire « *j'ai envie de* (dire oui) », on n'arrive pas à croire que la relation soit « un ensemble de flèches », au moins si on tient à ne pas s'évader hors l'univers de l'authentique mathématique.

Concrètement, voici donc l'alternative devant laquelle se trouve placé, qu'il le veuille ou non, le lecteur disciple attentif :

d'ensembles : l'ensemble de départ (X) ; l'ensemble d'arrivée (Y) : le graphe (composé de flèches) qui, *abstraction faite des flèches*, est lui-même un sous-ensemble du produit cartésien de X et de Y : ce sous-ensemble est précisément celui des couples (x, y) pour lesquels la réponse à la question « le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ? » est oui.

L'exposé de M. Revuz comporte d'ailleurs cette clause. Mais elle est indiquée après coup, et, quelque peu fallacieusement, comme si elle était une conséquence, alors qu'il est indispensable de la sous-entendre au titre de *composante* dans la *pseudo*-définition de la relation. Le paragraphe b), cité dans le texte, se poursuit en effet par des exemples destinés à montrer le caractère « binaire » de la relation « entre l'être x et l'être y ». Puis, avant d'en venir à la notion de « structure », l'auteur conclut :

« C'est avec des ensembles et des relations (donc, si l'on veut, en définitive uniquement avec des ensembles puisque la donnée d'une relation est équivalente à celle d'un *ensemble, partie du produit cartésien de deux ensembles*), que toute la mathématique va se trouver reconstruite. » ([13], 48.)

Cet « ensemble, partie du produit cartésien de deux ensembles » (locution que nous avons soulignées dans la citation), c'est le sous-ensemble des couples (x, y) pour lesquels la réponse à la question « le couple (x, y) vérifie-t-il la relation ? » est « oui ». Il convenait d'énoncer explicitement, non pas seulement les conditions pour qu'une relation « ait droit de cité en mathématique », mais d'énoncer également la définition complète de la relation elle-même. Un exposé magistral se devait d'être parfaitement clair, c'est-à-dire parfaitement explicite, sur un point aussi important et aussi délicat.

en même temps évidemment que son maître Bourbaki, que celui-ci l'avoue ou non.

Ou bien exclure du domaine proprement mathématique la relation définie comme « ensemble de flèches », parce que la « flèche », n'étant pas un ensemble, requiert pour avoir une signification d'être référée à l'univers pré-mathématique.

Ou bien admettre que la « relation » définie comme « ensemble de flèches » appartient au domaine mathématique, bien qu'il soit impossible d'en préciser la signification *proprement mathématique* sans la référer à une donnée *pré-mathématique* et par conséquent *non proprement* mathématique.

Nous avons déjà rencontré cette alternative ; elle constitue l'implication métaphysique de la question soulevée par la « mathématique moderne ». Nous allons donner une expression précise et abrégée, en vue de rendre plus claire la suite de notre exposé.

La relation, entité « fermée » ou entité « ouverte » ?

Etant entendu que l'on considère des entités[37] d'ordre mathématique, distinguons, pour de telles entités, deux qualifications qui sont à priori également possibles et qui, considérées ensemble, constituent une dichotomie adéquate ; c'est-à-dire que, à une même entité, on doit attribuer soit l'une soit l'autre de ces deux qualifications.

Nous dirons qu'une entité mathématique est *ouverte* si la notion qui la spécifie ne peut être définie sans être référée à des données non formellement mathématiques, lesquelles doivent

(37) Nous employons à dessein un terme fort général. « Entité » signifie « quelque chose qui existe », quelle que soit d'ailleurs la nature de cet exister. Et comme, en retour, rien n'existe qui ne soit déterminé, il faut associer à chaque « entité » une « notion » qui en caractérise la nature. Nous ne préciserons pas quelle est la nature de la distinction qui existe entre une « entité » et la « notion » qui lui correspond. La « notion » spécifie l' « entité », c'est-à-dire qu'elle en précise l'espèce (ou nature). La « notion » elle-même est, en propre, l'objet de la définition. Ainsi nous laissons ouverte pour le moment la question de savoir si et comment une *entité* mathématique se distingue de sa *notion* et de sa *définition*. Mais nous supposons évidemment que cette définition d'une entité mathématique satisfait aux normes de la bonne définition ; et, notamment : avoir une signification, être prédicative. (Cf. note 35.)

cependant, et par le fait même, être appelées pré-mathématiques puisqu'elles sont nécessairement et intrinsèquement requises pour définir une entité mathématique. Une entité ouverte peut d'ailleurs être décrite, désignée, située, en employant seulement des notions qui sont formellement mathématiques. Mais *elle ne peut pas être définie de cette manière* ; c'est-à-dire que les descriptions ou désignations qui peuvent en être faites, doivent être elles-mêmes référées à des données pré-mathématiques si on veut en préciser la signification.

Nous dirons qu'une entité mathématique est *fermée* si la notion qui la spécifie peut être définie à partir d'entités et de notions formellement mathématiques, sans qu'aucune référence à des données non formellement mathématiques soit nécessaire. Une telle référence peut d'ailleurs être utile et opportune ; dès là qu'elle n'est pas nécessairement requise, la notion définie, et partant l'entité, est dite fermée.

Cela étant précisé, énonçons à nouveau en vue d'en dégager les implications, l'alternative à laquelle nous venons d'être conduit en suivant pas à pas l'exposé de Bourbaki.

La relation, si elle est définie comme un ensemble de « flèches », est une entité ouverte. Il faut donc, ou bien exclure la relation du domaine proprement mathématique ; ou bien admettre qu'il peut y avoir des entités ouvertes dans le domaine proprement mathématique. Tout le monde refuse le premier membre de l'alternative. Mais *Bourbaki refuse* également le second : c'est cela que montre, plus exactement ce que confirme, le cas de la relation. En vue de le montrer d'une manière précise, observons que Bourbaki *vise, sans y réussir, à* faire de la relation une entité fermée.

En premier lieu, énonçons, derechef, ce qui est le plus clair. Bourbaki *ne réussit pas* à faire de la relation une entité fermée.

Il faudrait pour cela qu'on pût « tirer » la relation, soit des propositions p) et q) ci-dessus transcrites, soit des considérations développées au paragraphe suivant (b). Or il n'en est rien. En effet, en ce qui concerne le paragraphe b), nous avons observé que la relation n'y pourrait être l'objet que d'une définition non prédicative, non « valable » par conséquent. Quant aux propositions p) et q), elles comportent l'entité « couple ». Mais le couple (x, y) n'est pas « la relation entre l'être x et l'être y » ; il n'est pas possible de « tirer » analytiquement la notion de relation de la notion de couple, et le fait de consi-

dérer un « ensemble » de couples ne change rien à cette impossibilité. Si, en effet, la notion de relation présuppose celle de couple, puisque toute relation comporte deux extrêmes ; par contre, de la notion « deux éléments d'un couple », il n'est pas possible de tirer analytiquement la notion « deux extrêmes d'une relation ». Car, *dans le second cas s'ajoute une autre donnée, celle d'ordination ;* et, absolument, il s'agit d'une autre notion. Cette donnée nouvelle, ou cette notion autre, sont il est vrai si « intuitives » qu'il est fort aisé de les introduire sans le déclarer, ou bien de les laisser s'introduire sans exiger qu'elles soient « déclarées ». Le lecteur non critique se fait candidement complice de cette fraude, en sorte qu'une entité en réalité ouverte se trouve en fait présentée comme étant fermée. Mais cete contrebande ne peut pas être prise au sérieux. Il reste donc que, en réalité, Bourbaki *ne réussit pas* à faire de la relation une entité fermée.

En second lieu, nous disons que Bourbaki *voudrait réaliser* ce à quoi précisément il échoue, à savoir, nous le répétons, de faire de la relation une entité fermée.

Procès d'intention, dira-t-on ? Non, observation tout objective. Les locutions que nous avons déjà citées : « J'ai bien envie de (dire) » [34], « si l'on veut » [35], sont tout à fait étranges dans des traités dont le caractère élémentaire fait encore mieux ressortir la haute tenue scientifique. Serait-ce un hasard que ces locutions étranges apparaissent l'une et l'autre, en deux traités différents, à propos du *même* aspect de la *même* question ?

Si Evariste ne dit pas « ce qu'il a envie de dire » [34], à savoir que « la relation est un ensemble de flèches », c'est que le désir de « taire » l'emporte sur celui de « dire ». Or « dire », ce serait faire de la relation une entité ouverte. « Taire », c'est vouloir en définitive que la relation soit (il n'est pas dit « comment ») considérée comme une entité fermée.

C'est cela même que, de son côté, M. Revuz exprime d'une manière positive, mais non moins « subjective ». « C'est avec des ensembles et des relations (donc, si l'on veut, uniquement avec des ensembles puisque la donnée d'une relation est équivalente à celle d'un ensemble) » [35]. « Si l'on veut » ? Y aurait-il, en l'occurrence, à « vouloir » ou à « ne pas vouloir » ? Ou bien M. Revuz voudrait-il vouloir sans le vouloir vraiment, tout comme Evariste a envie de dire sans y réussir ? On comprend d'ailleurs fort bien le pourquoi de ce vouloir... aléatoire. Vou-

loir vraiment, c'est-à-dire sans « si », exigerait en effet d'*établir* que « la donnée d'une relation est équivalente à celle d'un ensemble ».

Or M. Revuz sait mieux que quiconque en quel sens ce n'est pas vrai, puisque lui-même ne réussit pas à montrer que la donnée d'un ensemble entraine comme sa conséquence celle d'une relation ; bien qu'en retour, la donnée d'une relation entraine comme sa condition celle d'un ensemble. M. Revuz ne peut donc vouloir que conditionnellement, parce qu'il ne pourrait justifier un vouloir catégorique ; mais le fait qu'il « veuille », sans pouvoir le faire absolument, montre qu'il tient à l'enjeu de ce vouloir. Cet enjeu est d'ailleurs clairement exprimé. « Avec des ensembles et des relations (donc, [... si on pouvait le vouloir], uniquement avec des ensembles. » Cela ramène[rait] la « relation » à l' « ensemble » et transforme[rait] par conséquent la « relation » en entité fermée. En sorte que, laissant tomber le mode conditionnel pour conclure : « en définitive, toute la mathématique se trouve reconstruite avec des ensembles ».

Nous reviendrons, nous l'avons dit, sur cette manière de concevoir la mathématique et son unité. Elle constitue l'inspiration la plus profonde du bourbakisme. La preuve en est d'ailleurs que nous nous y trouvons ramené par l'alternative à laquelle nous a conduit l'étude de la relation. Que Bourbaki vise, bien qu'il n'y puisse réussir, à faire de la relation une entité fermée, révèle en effet toute l'importance de cette visée. L'univers mathématique devant, en bourbakisme, ne comprendre que des entités fermées, la relation doit être *posée* comme étant une entité fermée au moment même où elle est considérée comme une entité proprement mathématique.

Nous disons bien « posée », c'est-à-dire posée « arbitrairement », afin d'exprimer avec exactitude ce que vise à réaliser, ce que réaliserait si c'était possible, l'exposé de la notion de relation dans les traités de « mathématique moderne ». C'est qu'en effet « le Bourbaki », après avoir — censément — défini la relation, et n'avoir — prétend-il — utiliser pour le faire que la notion d'ensemble, « ce même Bourbaki » donc, ensuite et en fait, met en œuvre l'entité « relation », comme si celle-ci était, non un « sous ensemble de *couples* », mais bien « un ensemble de flèches ». Nous croyons d'ailleurs que Bourbaki a raison, mais c'est, en un sens contre lui-même. En l'expliquant, nous rendrons justice à Bourbaki mathématicien, libéré de la faillite promise au système bourbakien ; telle sera

l'opportune conclusion de ce paragraphe consacré à l'étude de la relation.

La notion de relation ne peut être analytiquement définie à partir de la notion d'ensemble.

Que nous ayons pu le montrer à partir des prémisses posées par Bourbaki lui-même, établit déjà suffisamment que cet auteur admet en fait, pour la relation, une notion plus riche que celle dont il prétend poser en droit la définition. C'est ce qu'il est aisé de confirmer, en commentant l'autre définition, donnée pour ainsi dire « in voto » : « La relation, c'est un ensemble de flèches ». Nous précisons, d'emblée, qu'en évoquant les flèches nous nous plaçons strictement au point de vue de l'*intelligibilité*. La question que nous débattons n'est pas de savoir s'il est opportun d'employer les flèches pour « représenter » les relations et pour en faciliter la compréhension. Cela, on l'a toujours fait. Et, considéré à ce point de vue, le propos d'Evariste ne serait qu'une agréable plaisanterie à l'usage des jeunes élèves. Il est d'ailleurs indiscutable que les graphes constituent un instrument si approprié qu'ils contiennent une valeur propre d'intelligibilité : notre propos n'est pas de l'examiner. La question que nous débattons est de savoir si, en définissant au moins descriptivement la relation comme un ensemble de flèches, on n'adjoint pas en fait à la notion d'ensemble des éléments *intelligibles* qui n'en font pas partie, qui sont signifiés par les flèches, ou « si l'on veut » dont les flèches constituent les signes dans l'ordre sensible, et qui « passent » *subrepticement*, qu'on le « veuille » ou non, dans la définition qui est, en fait, donnée de la relation ? Que telle soit la vérité, il suffit pour le montrer de comparer les énoncés contenus dans l'exposé de Bourbaki avec les données qu'impliquent les flèches. Nous considérons celles-ci, d'abord quant à l'existence, ensuite quant à la nature.

Il convient, en premier lieu, de se placer au point de vue de l'exister.

Poser « ensemble de flèches », suppose évidemment qu'il y a des flèches; mais suppose également que chaque flèche est *une* flèche. Car, « ensemble » et « élément » son corrélatifs. Il n'y aurait pas d'ensemble s'il n'y avait pas : *un* élément, et *un* élément... Quelle que soit la nature de l'unité propre à l'ensemble,

cete unité n'existerait pas sans l'individualité de chaque élément. Tout cela, Bourbaki l'admet, évidemment, et dès le début. Ainsi, l' « ensemble de flèches » rappelle-t-il, aussi bien graphiquement qu'en vertu de la plus primitive des données bourbakiennes, que chaque flèche est *une* flèche, que chacune des flèches est une entité *individuée*. Et comme chaque flèche relie deux éléments d'un même couple [désigné ci-dessus par (x, y)], il s'ensuit que la représentation sagittale rappelle que chaque couple est lui aussi une entité *individuée* et qu'il intervient par conséquent *individuellement* dans « la relation » considérée.

Or, c'est bien de cette manière que le couple (x, y) est envisagé par Bourbaki quand cet auteur définit les notions de fonction, application, surjection, injection, bijection. La correspondance n'est, nous le verrons, de l'ensemble X des x à l'ensemble Y des y que parce qu'elle est de *tel(s)* x à *tel(s)* y ou inversement de *tel(s)* y à *tels(s)* x. Les définitions précises portent formellement sur *tel* couple, par dérivation sur tout couple, par suite seulement sur l'ensemble des couples.

D'autre part, revenons à la définition (D) que nous avons analysée. « La relation (1) est le sous-ensemble des couples (x, y) pour lesquels la réponse à la question ' le couple (x, y) vérifie-t-il la relation (2) ? ' est oui. » Nous distinguons, dans cet énoncé, les deux incidences du mot « relation ». Elles désignent la même entité, et de là vient que cette définition est, nous l'avons vu, non prédicative. Ce même vice peut être manifesté, au point de vue qui nous occupe maintenant, de la manière suivante. La relation (2) est associée à *tel* couple, dont elle est présentée comme une propriété. La relation (1) est associée, et même identifiée, à un sous-ensemble de couples. Et comme la donnée d'un ensemble comme tel présuppose celle de ses éléments, l'acception (1) de « relation » en présuppose l'acception (2). Mais, en retour, selon le « modus significandi » adopté, savoir : « La relation (1) *est* le sous-ensemble... », c'est celle acception (1) du mot « relation » qui est *signifiée comme étant directement définie*. C'est donc cette même acception (1) qui est, ipso facto, posée comme étant définissante par rapport à toute autre acception ; c'est à elle par conséquent que doit être référée l'acception (2). La définition proposée implique donc, entre les deux acceptions du mot « relation », deux ordinations qui sont opposées l'une à l'autre ; elle ne peut être prédicative. Et cette difficulté tient radicalement au « modus significandi » de la définition ensembliste, type de définition auquel tient tant le bourbakisme : « la relation (1) est le sous-

ensemble... » Puisqu'il s'agit de *la* relation, *le* sous-ensemble doit être conçu comme « totum », non comme « omne » : chacun des couples n'est plus considéré distinctement, comme une entité individuée ; *la* relation est supposée définie comme appartenant à l'ensemble comme tel, non à chacun des couples.

On doit donc conclure ceci. La manière de concevoir la relation et le couple qui est *en fait* considérée comme étant la vraie, c'est-à-dire celle à laquelle se réfère en réalité l'analyse que Bourbaki fait de la relation, se trouve impliquée par la représentation sagittale : chaque couple *est une entité individuée*, chacune des flèches signifiant l'existence de la relation *est une entité individuée*. Tandis que cette manière de concevoir est écartée par la définition de principe : « La relation *est le sous-ensemble* des couples... » Et c'est la représentation qui, pratiquement, norme l'interprétation de la définition. La représentation impose en effet de considérer comme authentique, c'est-à-dire comme objet véritable de la mathématique, la relation telle que la signifie l'acception (2) : *la* relation est en propre l'attribut d'*un* couple*, et non directement celui d'un ensemble. Mais, dans ces conditions, la notion de « relation » n'est plus définie formellement ; c'est-à-dire qu'elle n'est pas en fait définie par la définition formelle qui en est proposée. La notion de relation ne peut plus avoir de signification que par référence au contenu intuitif consignifié par la flèche. Et comme la flèche appartient au « pré-mathématique », et pas à l'univers proprement mathématique, il s'ensuit que la relation telle que l'analyse en fait Bourbaki mathématicien est une notion ouverte ; alors que, dans le « système » bourbakien, elle est présentée et déclarée comme étant une notion fermée.

Cette même conclusion se trouve confirmée et précisée, si on considère les flèches au point de vue de la nature, et plus seulement à celui de l'exister. La flèche, à la fois, distingue, unit et ordonne entre eux deux extrêmes. La flèche spécifie respectivement « origine » et « terme » ; ou, s'il y a mouvement fût-ce virtuellement, spécifie « départ » et « arrivée ».

Ces données « triviales » pensera-t-on, constituent, en ce qui concerne la relation, le point de départ concret de l'analyse métaphysique. Mais nous les considérons à un autre point de vue. Elles véhiculent pour ainsi dire un certain contenu intelligible dont nous allons observer qu'il est assumé dans la théorie

mathématique de la relation, bien qu'il ne puisse être intégré dans la définition *formelle* que Bourbaki donne de la relation.

Les notions déjà mentionnées : fonction, etc..., bijection ; les propriétés de la relation, à commencer par la réciprocité,... : toutes ces choses ne peuvent être définies que si la relation a un « sens », ou équivalemment si le couple (x, y) dont on suppose qu'il « vérifie la relation » est un couple ordonné, « x étant un *premier* terme et y un *second* terme » [38], « x appartenant à un ensemble dit de départ et y à un ensemble dit d'arrivée » [38]. Et si l'analyse moderne de la relation constitue un approfondissement, cela tient précisément à ce qu'elle formalise et met en œuvre dans le domaine mathématique une donnée qui est co-essentielle à la relation en tant que celle-ci est une catégorie ontologique : la relation inclut une « ordination à », ordination d'un *premier* extrême *à* un *second* extrême. Or c'est justement cela que signifient, à partir de l'intuition sensible ou de l'expérience familière, soit la flèche qui va d'un premier point vers un second et non du second vers le premier, soit le déplacement qui exclut d'arriver avant de partir et consiste à partir en vue d'arriver. Il y a donc, en Bourbaki, parfaite cohérence entre, d'une part, les considérations préliminaires, énoncées d'ailleurs d'une manière fort précise, qui accompagnent l'image de la flèche, et d'autre part le développement effectif des théories qui concernent soit la relation elle-même soit les notions qui en dérivent. Ici et là, l' « ordre » et l' « ordination » sont impliqués au titre de condition, aussi bien pour définir la signification des notions que pour fonder celle des conclusions.

Revenons maintenant, encore une fois, à la définition (D) comme étant « proprement mathématique ». « La relation (I)

(38) Cela est d'ailleurs explicitement affirmé au cours des explications qui, au titre de préliminaires, accompagnent l'image de la flèche et présentent « une idée vieille comme le monde ». « Pour définir une relation (qui sera dite *binaire*), nous considérons deux ensembles E et F, E ensemble dit de départ, F ensemble dit d'arrivée. Puis nous formerons des *couples* qui s'écriront (x, y) formés d'un *premier* terme, pris dans E, et d'un *second* terme, pris dans F. La question sera alors de savoir si le couple (x, y) vérifie la relation (alors il y a une flèche qui part de x vers y) ou s'il ne la vérifie pas. » ([14], 66.)

Il n'est pas dit que la flèche soit la relation. Mais la flèche, qui indique l'existence de la relation, ne peut être le signal de cette existence que là où elle est elle-même, c'est-à-dire au sein de *tel* couple, de *tel* x à *tel* y.

est le sous-ensemble des couples (x, y) pour lesquels la réponse à la question 'le couple (x, y) vérifie-t-il la relation (2) ?' est oui. » Un couple est un ensemble de deux éléments. Et, de soi, ni la notion d'ensemble, ni par conséquent celle de couple, n'impliquent « ordination ». On peut en effet ordonner un ensemble, et même le « bien ordonner », etc... ; cela suffirait à prouver, s'il en était besoin, que, de soi, « ensemble » et « couple » ni n'excluent ni n'incluent « ordre »[39]. Comment dès lors faut-il concevoir « le couple (x, y) » qui intervient dans la définition de la relation ?

L'observation qui vient d'être faite exclut la possibilité de le concevoir comme ordonné. A moins qu'on ne mentionne explicitement, **dans la définition elle-même, soit que « x est** ***premier*** **et y** ***second*** **», soit que x appartient à un ensemble « de départ » et y à un ensemble « d'arrivée ». Mais alors, il faudrait** avouer qu'on fait appel **à des données « pré-mathématiques »,** et ne pas prétendre qu'on puisse **« reconstruire toute la mathé**matique uniquement avec des ensembles »[40], **étant donné qu'en** vertu même de sa définition la notion de relation **contiendrait** des éléments étrangers à la notion d'ensemble.

Et s'il est impossible de concevoir le couple (x, y) comme étant ordonné, on ne peut le concevoir tout au plus que comme pouvant l'être. Or le couple (x, y) ne peut recevoir la pro-

(39) On objectera peut-être que, dans le couple (x, y), x est *premier* et y *second*. Mais cela, à quel point de vue ? Lecture ? Écriture ? Il faudrait le préciser. *Et si, par convention*, on définit la notion de « couple » comme incluant formellement celle d'ordination, *alors* : 1) *Il faut* appeler x premier élément et y second élément du couple x, y) ; et il ne suffit pas de dire : « x *peut* [nous soulignons] être appelé premier élément et y deuxième élément du couple (x, y) » ([13], 40). 2) *Il faut* expressément distinguer le « couple » ainsi ordonné (x, y), de la « paire » (x et y) qui en est seulement le support. — Et s'il est vrai que, dans ces conditions, la « paire » *est un ensemble* (de deux éléments), il est faux et il serait intellectuellement malhonnête de prétendre que, dans ces mêmes conditions, la notion de « couple » puisse se réduire à celle d'ensemble, que ce qui inclut l'ordre, et partant la relation, puisse être analytiquement et adéquatement défini au moyen seulement de ce qui, *de soi*, n'inclut ni l'ordre ni la relation. Nous refusons qu'on (Bourbaki ou un autre) introduise des données intelligibles nouvelles subrepticement, c'est-à-dire sans le déclarer explicitement. De cette manière, on masque la véritable origine de ces données. On peut alors les présenter comme étant des conséquences, inférées par le constructionisme mental, à partir d'autres données ; tandis qu'en réalité elles sont irréductibles, et manifestent par là que l'esprit ne peut se donner à lui-même ses propres objets.

priété d'être ordonné que de la relation qu'il peut vérifier, c'est-à-dire, dans la définition, de la relation (2). Dès lors, c'est cette relation (2) qui est définissante par rapport à la relation (1) qui est définie ; puisque c'est cette relation (2) qui détermine la nature du couple (x, y) et que la relation (1) est un sous-ensemble de tels couples. Et si (2) doit être considérée comme définissante par rapport à (1), la définition proposée est, nous l'avons montré, non prédicative, par conséquent non « valable ».

Critique, au point de vue épistémologique, de la notion bourbakienne de la relation.

La considération du couple (x, y), ou de la flèche qui lui est associée, soit quant à leurs implications au point de vue de l'intelligibilité, soit quant à leur statut au point de vue de l'individuation, conduit donc à la même conclusion. La définition abstraite et formelle, à la faveur de laquelle le bourbakisme tente de ramener la notion de relation à celle d'ensemble n'est ni conforme aux fondements ni adéquate aux développements qui, dans les exposés, encadrent pour ainsi dire cette définition. Fermée en celle-ci, ouverte en ceux-là, la notion de relation divise Bourbaki contre lui-même.

Cette scissure s'explique comme celles qui se produisent dans les édifices très vastes dont la base prend appui superficiellement sur des terrains qui diffèrent les uns des autres en profondeur par le mode de leur formation. La base finit par céder, sa rigidité transformant les pressions qui s'exercent, inégales aux différents points, en résultantes contraires entre elles. La relation est pour ainsi dire, dans le bourbakisme, le lieu médian où s'affrontent ces résultantes contraires.

D'une part en effet, la relation est une notion nouvelle, c'est-à-dire qu'elle se présente comme étant différente des notions d'ensemble et de structure posées comme primitives. Et, de plus, la notion de relation commande celle de fonction, elle-même sous-jacente à toute la mathématique. Il est donc, à ce double titre, d'une importance capitale que, si l'on entend reconstruire toute la mathématique et son unité à partir des notions effectivement choisies comme primitives, la notion de relation soit ramenée à celle d'ensemble. Supposé qu'on y réussisse, on résout de surcroît les fort difficiles questions qui concernent la nature de la fonction.

D'autre part, la relation est, comme le dit Evariste, une « idée vieille comme le monde » ([14], 54). Or personne n'a

jamais conçu une « relation » comme un « ensemble ». Le signe en est d'ailleurs que l'on parle de « relations d'ensemble », pour signifier par exemple que telles relations existent entre certains individus lorsque ceux-ci sont ensemble, et n'existent plus lorsque ces individus ne sont plus ensemble ; on emploie également la locution « ensemble de relations », pour ces raisons mêmes qui autorisent à parler d'un « ensemble de choses » lorsque ces choses sont semblables par leur nature. On voit donc que, selon le « modus significandi » usité, l'entité désignée par « relation » peut dépendre de l'entité désignée par « ensemble », *ou bien inversement*. Les deux notions d'ensemble et de relation, étant conçues comme déterminables l'une par l'autre quant à l'application, le sont par le fait même comme indépendantes l'une de l'autre quant à leur compréhension.

On comprend d'après cela que le bourbakisme, tenant à bon droit à partir de quelque chose que tout le monde comprenne, et tenant d'autre part à ramener la notion de relation à celle d'ensemble, se trouve en porte-à-faux. Et c'est dans l'élément médian, c'est-à-dire dans la « relation », que se produit la scissure, en dépit de l'apparente cohérence qui tient à un formalisme verbal. En vue de l'examiner avec précision, adjoignons à la définition (D) deux énoncés qui en modifient il est vrai la forme et le « modus significandi », mais qui sont prédicatifs et qui permettent de faire la triangulation intelligible de (D), elle-même.

(D) La relation (1) est le sous-ensemble des couples (x, y) pour lesquels la réponse à la question : « le couple (x, y) vérifie-t-il la relation (2) ? » est « oui ».

(D') La relation (1) est le sous-ensemble des couples (x, y), étant entendu que ce sous-ensemble est un ensemble de relations (2').

(D") La relation (1) consiste en ce que chacun des couples (x, y) qui appartiennent à un certain sous-ensemble [de l'ensemble supposé donné des couples (x, y)] vérifie *la même* relation (2").

Rappelons qu'en (D), (1) et (2) sont censées désigner la même entité. Cette entité étant prétendument fermée, (D) se présente comme auto-suffisante, et donc comme cohérente. Mais cela n'est vrai que de la forme verbale. Au point de vue de l'intelligibilité, qui mesure ici celui de la réalité, (D) n'est pas prédicative ; (D) n'a pas de portée. C'est-à-dire que, s'il n'y avait pas d'autres considérants, « relation (1) » demeurerait

non défini. Ces considérants sont, en fait, adjoints subrepticement ; et là est toute la question que nous débattons. « Relation (1) » est le même, en (D') et en (D''), qu'en (D) : en ce sens que c'est précisément ce qu'il s'agit de définir. Aussi, « relation (1) » est-il référé, respectivement à « relation (2') » et à « relation (2'') », en (D'), et en (D''). Expliquons le sens de ces deux énoncés (D') et (D''), en vue de situer celui de (D).

(D') ne fait qu'expliciter la référence *originellement* concrète de (D). *La* « relation (2) » est en effet « *cette* relation que vérifie *tel* couple (x, y) ». *La* « relation (2) » est celle dont *la* flèche indique l'existence au sein de *tel* couple (x, y). Or « relation (1) », que (D) est censée définir est, selon les prémisses qui introduisent (D) et qui doivent par conséquent en préciser la signification, un « ensemble de flèches », c'est-à-dire si on remonte de l'image à la réalité, un « ensemble de 'relations (2') ». Ainsi, (D') fait tout simplement dire à Evariste ce qu'il « a bien envie de dire », et ce qu'il faut lui faire dire si on veut lui éviter de proposer l'énoncé non prédicatif (D) au titre de définition.

Evariste doit il est vrai consentir, au moins *provisoirement*, à ce que « relations (2') » soit en (D') au pluriel, et non pas au singulier comme « relation (2) » l'est en (D). Et ce changement est d'importance, puisqu'il implique, comme nous l'allons voir, que l'on renonce au propos essentiel du bourbakisme, savoir : « Au commencement est l'ensemble ».

(D) vise en effet à définir « relation (1) » comme étant un sous-ensemble de couples (x, y), et par conséquent comme un certain *ensemble* R qui est, comme tel, référé directement à l'*ensemble* X des éléments x et à l'*ensemble* Y des éléments y. « Relation (2) » [supposée définie, et en réalité non définie] n'intervient que pour permettre de répondre soit « oui » soit « non » à la question « tel couple (x, y) fait-il partie de l'ensemble R », c'est-à-dire pour permettre de définir [*verbalement mais non réellement*] l'ensemble R. « Relation (2) » est au singulier, parce que c'est [censément] un critère destiné à être appliqué à *chaque* couple (x, y) individué. Mais, en définitive, toutes les entités véritablement mathématiques sont [seraient] des ensembles : X est un ensemble ; Y est un ensemble ; R, et partant « relation (1) », est un ensemble.

Le pluriel « relations (2') », qui figure dans (D'), rappelle au contraire : que, premièrement, il n'y a pas d'ensemble sans

éléments[40] ; que, deuxièmement, il est non consistant[41] d'attribuer à un ensemble une nature et une qualification sans préciser quel est le fondemet de cette attribution. Si (x, y) est un « couple », on ne voit pas comment un ensemble d'entités dont chacune est un « couple » pourrait être une entité appelée « relation », sinon parce qu'il y aurait « relation » entre les « couples » qui composent cet ensemble... Mais ce n'est pas cela. En effet, il n'est pas question, en (D), de relations entre deux (ou plusieurs) couples (x, y) ; il est question, d'abord, de « relation (1) » qu'il faut définir, et puis de *telle* relation [procédant] de *tel* x [vers] *tel* y, « relation (2) » qui est censément instrument de la définition. L'attribution de la qualification « relation » à l'entité « ensemble de couples » ne peut donc être expliquée de cette manière. Dans ces conditions, le seul moyen de justifier qu'un « ensemble » soit qualifié et nommé « relation » consiste à supposer que les éléments en sont également qualifiés et nommés « relation ». En sorte que l'ensemble est « relation » parce qu'il est un ensemble de « relations ». Restera à préciser : premièrement quelle est cette « relation (2) » de *tel* x à *tel* y, deuxièmement quelle est la nature du rapport qui se trouve établi entre « relation (1) » et « relations (2') », entre le « singulier » et le « pluriel ». Du moins l'énoncé (D') est-il prédicatif et donc consistant, tandis que l'énoncé (D) ne l'est pas.

(D") précise ce que (D') laisse en suspens, en consommant il est vrai la rupture avec ce que voudrait faire Bourbaki, mais en rendant compte croyons-nous de ce que Bourbaki fait réellement. Expliquons comment.

Demeurons d'abord dans le domaine du « prédicatif » et expliquons l'une par l'autre (D') et (D").

La mathématique ne peut normer l'épistémologie qui, su-

(40) Nous ne nions ni l'existence d'un ensemble comprenant un seul élément, ni l'existence virtuelle de l' « ensemble vide ». Nous ne pouvons examiner ici ces questions. Un ensemble comprend normalement plusieurs éléments, et c'est pourquoi nous écrivons au pluriel « relations (2'). »

Bourbaki admet évidemment qu'en ensemble est un ensemble d'éléments, et que les deux termes « ensemble » et « élément » sont corrélatifs l'un de l'autre. Mais, en fait, la prévalence est accordée à l'ensemble : la définition (D), proposée pour la relation, le montre typiquement.

(41) Nous entendons, par « non consistant », « être dépourvu d'intelligibilité » et par conséquent de réalité.

balternée à la métaphysique, discerne dans les lois de l'être le fondement des lois de l'esprit. Le fait qu'un ensemble d'éléments puisse et même doive être qualifié et nommé de la même manière que chacun de ses éléments est bien connu : le rapport de l'ensemble à l'élément est, dans ce cas, un rapport d'universel à singulier. Quelle est la nature de ce rapport ? Cette question est « vieille comme le monde », et renaitra toujours de ses cendres. L'examiner reconduirait à l'ontologie des mathématiques mais cette étude ne peut être un traité. Nous nous bornons à observer que la dite question ne peut être évitée. Si « relation (1) » est un ensemble [de flèches] de « relations (2') », il faut préciser quelle est la nature du rapport entre (1) et (2'), entre l'universel et soit le singulier soit l'ensemble des singuliers.

En l'occurrence, la chose est aisée, du moins si on en laisse de côté les implications métaphysiques[42]. Si, par exemple, « relation (2) » est la relation « double », prise de x vers y, les couples : (4, 2), (12, 6), etc..., vérifient cette relation. Les « relations (2') » sont alors : la relation « double » dans le couple (4, 2), la relation « double » dans le couple (12, 6), etc... C'est toujours *spécifiquement* la même relation, savoir « double », dont on considère comme différentes les unes des autres les réalisations dans les différents couples. Cette relation, unique quant à son espèce et à sa définition, est-elle effectivement « multipliée », du fait qu'elle est « vérifiée » par plusieurs et même par une infinité de couples. Si on l'admet, il faut écrire au pluriel « relations (2') », ainsi que nous l'avons fait *provisoirement* en (D'). Si on ne l'admet pas, il faut écrire au singulier « relation (2") » ; et il faut en conséquence donner à l'énoncé la forme (D").

Cet énoncé (D") suppose que la notion de « double », ou en général celle de « telle relation » est déjà donnée ; il ne vise donc pas à définir une telle entité, mais seulement à la caractériser. En d'autres termes, « double », ou « relation », étant supposé donné au point de vue de la compréhension, (D") en assigne adéquatement l'extension : étant considérés tous les couples d'entiers naturels (x, y), il y a, dans cet ensemble, un sous-ensemble dont chacun des éléments vérifie la relation « double » (ou « telle relation »). En retour, la relation

(42) Toutes les questions examinées dans les traités classiques à propos de l'abstraction se retrouvent au sein du domaine proprement mathématique. Mais elles y revêtent une forme encore plus ténue, ce qui en rend l'exposé plus délicat.

« double » consiste donc en ce que chacun des couples de ce sous-ensemble vérifie cette même relation ; ce sous-ensemble est le domaine d'existence (mathématique) de cette relation : telle est la signification de (D").

Comment, demandera-t-on, la relation « double » est-elle un « donné » ? Nous répondons que la notion « double » est dégagée par l'esprit lorsque celui-ci compare entre eux quelques-uns des couples : (4, 2), (12, 6), etc... ; nous ajoutons que, a posteriori, la considération d'*un seul* de ces couples suffit. Mais, quoi qu'il en soit de cet ensemble d'opérations, analysé sous le nom d' « abstraction » [42], ces opérations sont préalables à la caractérisation décrite par (D"). C'est donc (D"), et non (D'), qui exprime la vérité ; mais à la condition de bien entendre que (D") précise quel est le *domaine dans lequel subsiste* une relation, et que (D") ne constitue aucunement la *définition* de cette relation.

Nous pouvons maintenant rendre compte, en nous référant au dédoublement entre (D') et (D"), dédoublement observé dans le domaine du « prédicatif », de la viciosité qui affecte l'énoncé (D).

D'une part, (D) est présenté comme étant une définition de la relation. Dans cette vue, (D) ne peut, nous l'avons observé, être rendu prédicatif qu'en l'entendant au sens de (D'). Et il faut, dans ces conditions, admettre qu'il y a pluralité de « relations (2') », parce qu'il y a pluralité de couples (x, y) et parce que le sous-ensemble de ces couples ne peut être dit « relation (1) » que si chacun de ses éléments est « relation (2) ». Nous n'admettons pas cette assimilation de (D) à (D'), parce qu'elle repose sur une erreur d'ordre notionnel, savoir l'identification entre la *relation* de x à y et le *couple* (x, y) [43]. Bourbaki, qui commet cette erreur en identifiant, d'après (D), la relation avec un sous-ensemble de couples refuserait lui aussi l'assimilation de

(43) Nous ne nions évidemment pas que le couple (x, y), dont on suppose qu'il « satisfait à la relation », contienne cette relation (à laquelle il satisfait). Nous insistons sur ce qu'exige la précision. Celle-ci ne concerne pas exclusivement le domaine « proprement « mathématique ». Cela d'ailleurs ne serait possible que si la réalité « mathématique » pouvait être exprimée en employant exclusivement un langage « mathématique » n'ayant aucun mot en commun avec le langage réputé « trivial ». Mais si on utilise dans une définition « mathématique », savoir (D), les mots « couple » et « relation », on introduit ipso facto dans le domaine « mathématique » une imprécision incompatible avec lui, si, à l'occasion même de cette

(D) à (D') mais pour des raisons d'ordre général qui sont, nous l'avons vu, différentes de la nôtre.

D'autre part, (D) est en réalité une description du domaine dans lequel subsiste une relation. Dans cette vue, (D) est rendu prédicatif en l'entendant au sens de (D"). Telle est, selon nous, la vérité ; c'est-à-dire dans l'ordre intelligible, la réalité. La « relation (2") » est unique, et c'est la « relation (1) », la même relation. C'est cela d'ailleurs qu'exprimerait effectivement, et pas seulement verbalement, l'énoncé (D), s'il était prédicatif. Il faudrait pour cela qu'il ne fût pas une définition ; c'est-à-dire qu'il n'affirmât pas du « sous-ensemble des couples (x, y) », que ce sous-ensemble *est* la relation.

On voit donc que les difficultés d'ordre épistémologique inhérentes à l'énoncé-définition (D), ont en définitive pour origine une confusion d'ordre notionnel. Une relation est évidemment inséparable du domaine dans lequel elle existe ; mais la notion de relation et la réalité propre de la relation, *ne sont pas* la notion et la réalité propre des entités qui constituent, pour la relation, le domaine de sa réalisation. La relation n'est ni un couple ni un ensemble de couples, elle est « relation ». Voilà ce que prouve Bourbaki, à son corps défendant.

Cette preuve, a contrario, ne tient d'ailleurs pas seulement au vice de l'énoncé-définition (D), lequel a valeur de principe ; la preuve se trouve confirmée par le fait que le caractère original et irréductible de l'entité « relation » s'impose inéluctablement au cours des exposés, alors qu'il est en fait éliminé dans l'énoncé-définition (D).

Rappelons, pour mémoire, la « flèche », dont nous avons déjà observé le rôle ambigu. La flèche est entre deux points ; elle suggère « des choses » qui sont autres que le couple constitué par ces deux points. « Ces choses » *autres* que le couple, sont-elles d'ordre mathématique ? Evariste le voudrait. En fait, par le jeu implicite de l'intuition spontanée, Evariste l'admet ; mais, en posant comme définition l'énoncé (D), Evariste refuse de l'avouer.

Voici un autre exemple. Si une relation est une fonction,

définition, on confond l'une avec l'autre deux notions différentes signifiées par deux mots différents. Contint-il « la relation », le « couple » dans lequel se trouve cette « relation » *n'est pas* « la relation » (Cf. note 39).

et si cette fonction est une application, étant d'autre part considéré le couple (x, y) qui intervient dans (D), « y est image de x par l'application f » ([14], 90). Observerons-nous que la relation s'entend généralement de ce qui est image à ce dont il est l'image ? et qu'on inverse par conséquent le « modus significandi » habituel en attribuant à y d'être l'image de x, alors que la relation est de x vers y ? Quoi qu'il en soit, ce qui importe à notre point de vue est ceci. La locution « image de » ne désigne ni seulement ni principalement le couple (x, y) ; « image de » désigne formellement un certain type de rapport entre x et y. Et donc, à un type particulier de fonction, savoir l' « application », correspond, pour le rapport entre x et y, le type particulier « être image de ». Autrement dit, la différenciation de la relation correspond à celle du rapport entre x et y ; *la relation c'est donc ce rapport lui-même et ce n'est pas le couple* considéré comme étant l'ensemble des deux éléments entre lesquels existe ce rapport [43]. Telle est la manière de concevoir la relation qui est en fait sous-jacente aux exposés dont celle-ci est l'objet ; et cette manière de concevoir, qui est conforme à l'intuition spontanée, n'est pas celle que vise à insinuer l'énoncé-définition (D) [44].

La même « tension » se retrouve dans toutes les parties de l'exposé qui concerne la relation : propriétés, composition, etc. Les définitions sont données formellement en termes ensemblistes, mais elles impliquent un contenu intuitif. Nous ne développerons pas davantage une analyse critique de détail ; il serait sans intérêt de chercher à déceler le propos de Bourbaki, attendu que l'auteur lui-même déclare ce propos explicitement : tout ramener à l' « ensemble » et à la « structure ». Est-ce possible ? Nous ne le croyons pas. Et nous ne voyons pas que, à cet égard, l'entreprise soit une réussite. Les notions que fonde

(44) Des considérations semblables peuvent et doivent être développées, si on remplace la locution « y est image de x par l'application f », par celle-ci : « Une relation est une fonction si x, élément de l'ensemble de départ, a une valeur ou plus dans l'ensemble d'arrivée. » — Un élément qui appartient à un ensemble, qui donc est défini dans cet ensemble, « a une valeur » *dans cet ensemble.* Si on lui attribue d'*avoir* également *une valeur dans un autre ensemble*, on introduit en fait, quoique sans le déclarer, une autre notion, étrangère à celle d'ensemble et à celle de couple. On suppose en effet qu'il y a un certain *lien* entre la valeur de x dans l'ensemble de départ et « la valeur qu'a x dans l'ensemble d'arrivée » ; c'est-à-dire qu'on conçoit en fait la relation fonctionnelle comme un certain lien entre x et y. C'est ce qu'on a d'ailleurs toujours fait.

directement l'appréhension de la réalité ne sont pas réductibles à d'autres notions. Et si l'on tente cette réduction, on réintroduit, en marge de celle-ci, plus ou moins subrepticement, et pour autant fallacieusement, ce que comportent d'absolument irréductibles les dites notions fondées sur l'appréhension directe. Voilà ce que, croyons-nous, établissent les précédentes observations.

Nous ne contestons pas que ce « cours forcé », imposé pour la notion d'ensemble, assure certains avantages quant à la présentation. Mais, d'une part, il convient de ne pas être dupe, si on se place au point de vue de l'épistémologie qui est en l'occurrence celui de la réalité ; et, d'autre part, cette uniformisation quelque peu factice est loin de ne présenter que des avantages. En précisant brièvement l'un et l'autre, nous récapitulerons l'essentiel de ce paragraphe consacré à la relation.

Définir formellement la « relation » comme étant « un sous-ensemble de couples dont chacun satisfait à la relation » (D), entraine que la notion de « fonction » est définie de la même manière que celle de « relation », puisqu'on passe de l'une à l'autre par particularisation [14]. Une « fonction » se trouve donc définie comme étant un sous-ensemble de couples, ce sous-ensemble étant lui-même caractérisé de la manière suivante. Un ensemble de couples étant supposé donné, certains de ces couples « satisfont à la relation fonctionnelle » (qu'il s'agit d'ailleurs de définir). Ces couples-là, et eux seuls, constituent le sous-ensemble qui est censé définir la fonction. Cette définition est évidemment non prédicative, tout comme la définition (D) que nous avons examinée à propos de la relation. Nous ne revenons pas sur ce point.

Notre dessein est maintenant d'insister sur le fait que ce processus, supposé qu'il réussisse, aboutit à l'éviction complète de toute « forme » associée à la notion de « fonction ». La fonction $y = \frac{1}{2} x$, par exemple, n'est plus conçue comme un lien exprimé par une formule *permanente*, entre la *variable* x et la *variable* y ; cette fonction définie par exemple dans l'ensemble des entiers naturels, et à partir de l'ensemble des couples d'entiers naturels, *c'est* le sous-ensemble de ces couples dont chacun vérifie la relation fonctionnelle... Que faut-il mettre au lieu et place de ces points de suspension ? Autrement dit, comment définir cette relation fonctionnelle qui constitue le critère d'appartenance au sous-ensemble qui est lui-même censé définir la

fonction y = ½ x ? Ce sont les notions pré-mathématiques qui interviennent ici, au moins de l'aveu explicite de Bourbaki.

Il en résulte, du moins « in voto », une sorte d'existentialisme dans le domaine mathématique proprement dit. Une fonction n'y est plus une « forme » conçue comme un invariant liant deux variations virtuelles ; elle est un « donné » elle est censée n'être qu'un ensemble de couples (x, y), chacun de ces couples étant constitués non par deux valeurs *variables*, mais par deux valeurs *déterminées*. Qu'entre ces deux valeurs, dont chacun des couples est constitué, existe une relation qui, *comme telle, comme relation*, est toujours la même quelque soit le couple considéré, cela la théorie bourbakienne ne peut que l'écarter, parce que, primordialement, elle vise à l'écarter. Elle ne peut que l'écarter puisqu'elle méconnait, nous l'avons vu, que la relation soit en propre une réalité. Et elle vise primordialement à l'écarter, parce qu'elle pose originellement et absolument que, de la seule notion d'ensemble, doit procéder, en vertu exclusivement d'un formalisme analytico-synthétique, tout autre notion, en particulier celle de relation et celle de fonction. Dans ce cas comme dans beaucoup d'autres, le processus bourbakien substitue le constructionisme mental à la difficile réalité, au lieu de reconduire l'esprit à celle-ci par la médiation de l'intelligibilité.

C'est en quelque sorte trancher le Nœud gordien, ou du moins paraître le faire. C'est en effet présenter la conception nouvelle de la notion de fonction comme si cette conception résolvait la question — si débattue — de savoir quelle est la *nature* de la fonction : alors que le processus développé ne peut aboutir à aucune résolution dans la réalité, attendu qu'il est ordonné de telle manière que la question paraisse ne pas se poser. Concluons que si l'invasion de la notion d'ensemble dans toutes les branches de la mathématique peut favoriser la cohérence formelle de la présentation, il convient de ne pas être dupe de l'ensemblisme. Il n'en faut pas attendre ce qu'il ne peut apporter. Il n'est possible ni de déduire ni donc de définir, à partir de la seule notion d'ensemble, d'autres notions primitives, telles par exemple que la notion de relation et la notion de fonction.

La définition bourbakienne de la relation n'est pas requise pour fonder les précisions qu'apporte Bourbaki à la notion mathématique de relation.

Nous allons maintenant observer, en terminant, que les

approfondissements apportés par les traités modernes en ce qui concerne ces notions, sont non seulement sauvegardés mais beaucoup plus simplement exposés si on conserve la notion intuitive de relation, au lieu de chercher, en vain d'ailleurs, à la noyer dans un sous-ensemble de couples.

Etant considérée une relation R, de l'élément x appartenant à l'ensemble « dit de départ » E, à l'élément y appartenant à l'ensemble « dit d'arrivée » F, cette relation R pouvant être indiquée par une flèche, nous faisons observer que les qualifications « départ » et « arrivée » appartiennent primordialement au mouvement qui seul en fonde l'unité ; elles appartiennent donc au mobile réel ou imaginé, au train ou à la flèche, non aux gares ou aux points.

Si on ne considère pas, à plus forte raison si on nie l'existence propre de la relation comme telle, il est évidemment dépourvu de sens de lui attribuer quelque qualification que ce soit. Si au contraire on reconnait, conformément à l'expérience, que la relation a une réalité propre, c'est à la relation elle-même et pas aux extrêmes qu'il faut attribuer d'*abord* « départ » ou « arrivée ». Cette idée est « vieille comme le monde » ; et, n'était l'ensemblisme, elle pourrait conserver droit de cité dans la mathématique moderne.

Attribuer, comme il se doit, à la relation elle-même l'ordination que celle-ci connote entre ses extrêmes, s'exprime, selon le vocabulaire usuel, de la manière suivante. La relation de x à y est dite *efférente* à partir de x, *afférente* en y ; et c'est seulement par dérivation que x peut être appelé « élément de départ », et y « élément d'arrivée ».

Cela étant, la relation notée x R y en Bourbaki peut être considérée, à notre point de vue, soit comme une relation unique, de par sa spécification, soit comme un ensemble de relations ayant cette même spécification et dont *chacune* lie *un* x à *un* y.

Considérons x R y, en nous plaçant à ce second point de vue. Il peut y avoir 0 ou 1 ou plusieurs telles relations, soit efférentes en tel x, soit afférentes en tel y. C'est en considérant le nombre de ces relations, que l'on peut distinguer et caractériser les notions qui résultent de la relation par différenciation. On obtient aisément de cette manière les définitions des cinq notions dont, assez curieusement*, les seuls noms suffisent à offusquer certains mathématiciens traditionalistes. Voici ces cinq définitions.

1. Si, en chaque x[45], il y a 1 relation efférente *au plus*[46], la relation est une *fonction*.
2. Si, en chaque x, il y a 1 relation efférente *et une seule*, la fonction est une *application*.

On considère alors des « applications », et on les distingue les unes des autres eu égard au second extrême :

3. Si, en chaque y, il y a 1 relation afférente *au moins*, l'application est une *surjection*.
4. Si, en chaque y, il y 1 relation afférente *au plus*[46], l'application est une *injection*.
5. Si, en chaque y, il y a 1 relation afférente *et une seule*, l'application est une *bijection*.

Ces définitions coïncident évidemment avec celles qui sont exprimées en langage ensembliste. Mais elles sont plus simples, parce qu'immédiatement référées à la réalité même dont elles précisent certaines déterminations, savoir la réalité propre de la relation. Elles sont surtout mieux ordonnées. D'une part en effet, on peut les assigner, chacune respectivement, en procédant par dichotomies successives ; d'autre part, elles montrent que, si la bijection est réciproque, c'est en vertu même de sa définition. Nous ne voyons pas qu'il y ait là un « théorème » ([14], 95). Cette désignation, en elle-même, importe peu. Nous ne la relevons que parce qu'elle nous parait symptomatique. Le caractère artificiel du « modus significandi » qu'implique l' « ensemblisme » est à l'origine d'une sorte de mirage, lequel consiste à croire découvrir de pseudo-théorèmes[47], alors qu'il s'agit d'évidences « triviales » voilées par la complication des définitions.

Nous ne voyons donc pas qu'il y ait profit, fût-ce pour la mathématique comme telle, à décréter qu'une notion ne peut être « réellement mathématique », que si elle est coupée d'avec la notion « intuitive » à laquelle elle correspond en fait, et de laquelle elle est inséparable en droit. Même reconstruit par

(45) « En chaque x », et par conséquent « en tout x » ; en n'importe lequel des x qui appartiennent à l'ensemble considéré. Et pareillement pour les y.

(46) Et par conséquent : soit 0, soit 1.

(47) Nous n'entendons évidemment pas insinuer, pas même insinuer, que tout « théorème Bourbaki » soit un pseudo-théorème. Nous signalons un écueil. La cohérence du discours avec lui-même n'est pas la conformité de la pensée avec la réalité ; il importe de ne pas confondre l'un avec l'autre.

l'esprit, l'être mathématique demeure un « abstrait » surbordonné à la réalité *objective* soit sensible soit intra-mentale, « abstrait » pour lequel il est par conséquent impossible de revendiquer l'autonomie. C'est cela que montre la « relation », si on en analyse le statut tel qu'il est décrit en Bourbaki. Et la « relation » le montre mieux que ne le fait aucune autre entité, parce qu'elle constitue objectivement un critère du second ordre en vertu de sa ténuité, et parce qu'en vertu de son essence elle induit l'esprit qui l'appréhende à s'ordonner soi-même à la réalité.

2B. La remise en question de l'essence de la mathématique, considérée au point de vue de la métaphysique.

Pourquoi la mathématique, et quelle en est la nature ? Telles sont les questions, aussi importantes en elles-mêmes que par leurs répercussions, soulevées par la « mathématique moderne ». Nous avons, dans ce qui précède, examiné et décrit la situation du Bourbaki, en vue de déceler les réponses qu'il apporte à ces questions. Polarisées par l'esprit, ordonnées à en manifester la grandeur, les notions essentielles de la mathématique, qu'elles soient primitives ou subordonnées, sont elles-mêmes conçues par le bourbakisme comme correspondant à des entités fermées. Et nous avons observé, dans les meilleurs des exposés, l'existence d'une tension mal dissimulée entre la perspective irréaliste dont s'inspire le propos bourbakien et les authentiques approfondissements contenus dans le traité de Bourbaki. Nous allons maintenant constater qu'on retrouve les mêmes conclusions, si on cherche à confirmer, par un cheminement inverse, la phase ascendante de la même « induction ».

Ce cheminement, en voici l'énoncé. Si les notions de la mathématique sont dominées par la polarité de l'esprit, et si elles sont conçues comme correspondant à des entités fermées : alors, dans cette hypothèse, ces entités doivent effectivement être décrites comme le fait Bourbaki : voilà ce que nous nous proposons de montrer. Ce renversement de perspective ne constituerait qu'un jeu artificiel, s'il n'était au vrai la conséquence

d'un déplacement de point de vue. Ce déplacement consiste à remonter au principe lui-même, au lieu de ne considérer celui-ci que dans ses conséquences. D'une part, les traités ou les écrits concernant la mathématique moderne explicitent ça et là, dans leurs parties non « formelles », les données auxquelles reconduit comme on l'a vu l'analyse de leurs parties « formelles ». C'est à ce jalonnement, non systématique et cependant indicatif, que nous allons, dans ce qui suit, nous référer, retrouvant ainsi directement, ce que, dans ce qui précède, nous avons inféré. D'autre part, les qualificatifs « ouvert » et « fermé », appliqués à une entité forgée par l'esprit en vue de caractériser le rapport que celle-ci soutient avec la réalité, conviennent à cette entité elle-même en vertu seulement d'une sorte de dérivation. Car « ouvert » et « fermé », primordialement, spécifient deux types d'abstraction. Et comme il n'est pas possible de préciser ce jeu du « modus significandi » sans se référer aux données les plus primitives de la matéphysique [48], il en résulte que l'achèvement de notre enquête concernant l'essence de la mathématique doit s'accompagner d'un retour à ce qui a valeur de principes, aussi bien au point de vue général de l'ontologie réaliste qu'à celui de la mathématique proprement dite.

Nous allons donc reprendre l'argument que nous avons développé, et nous suivrons le même ordre pour l'exposer :

(48) Voici quelques indications concernant les fondements de la distinction « ouvert-fermé ».

L'intelligence rationnelle n'exerçant l'acte de connaître qu'en formant des concepts, cet acte a, de soi, pour objet, globalement : la réalité connue, le concept qui en est l'expression, et enfin le rapport de celui-ci à celle-là.

Cela étant, l'intelligence peut prendre pour objet de son acte exclusivement le concept. Dans ce cas, elle choisit donc de ne considérer ni le rapport que celui-ci soutient avec la réalité, ni par conséquent la réalité elle-même. L'opération abstractive, exercée par l'intelligence en acte de comprendre, est alors dite « fermée ». L'acte, en effet, « se ferme » sur le concept, lequel se trouve simultanément coupé d'avec la réalité et substitué à elle au titre d'objet. Le concept, et en même temps que lui la notion qui en constitue formellement le contenu, sont alors dits « fermés » ; la qualification d'une opération elle-même étant attribuée, non sans raison, au terme de cette opération.

Les éléments « ouverts » se définissent comme soutenant respectivement l'opposition de contradiction avec chacun des éléments « fermés » : soit que la réalité elle-même, et donc au moins impli-

d'abord les données primitives de la mathématique, ensuite les données également importantes mais subordonnées ; notre propos étant de montrer que la manière de concevoir les secondes découle de la manière de concevoir les premières. Nous confirmerons ainsi les unes par les autres, en vertu de leur unité organique, les conclusions auxquelles nous avons été conduit en examinant d'abord l'essence et puis l'unité de la mathématique. Et, comme nous venons de l'expliquer, nous ferons principalement état des déclarations qui ont en Bourbaki valeur de principe, et des données les plus primitives de la métaphysique.

1. Les entités mathématiques, les connexions qu'elles soutiennent entre elles, et partant la relation et l'unité, sont conçues, en bourbakisme, comme étant « fermées ».

Voilà ce que nous avons conclu, en examinant en tel et tel traité de « mathématique moderne » quelques uns des développements « formels ». Recueillons maintenant certaines déclarations non intégrées aux développements formels, déclarations qui équivalent à notre conclusion puisqu'elles reviennent à admettre que les entités mathématiques sont « fermées ». Ainsi l'inférence qui nous a conduit à cette conclusion sera-t-elle d'une

citement le rapport que le concept soutient avec elle, soient positivement considérés, soit que simplement ces mêmes choses ne soient positivement ni exclues ni considérées. L'abstraction ouverte comporte donc deux cas ; malgré la très grande importance du second, nous pouvons nous borner pour notre objet à considérer seulement le premier qui est plus simple. Il consiste en ce que la réalité elle-même, et pour le moins implicitement le rapport que le concept soutient avec elle, sont positivement considérés. L'acte de l'intelligence est alors dit « ouvert », car s'il ne laisse pas d'être spécifié et pour autant mesuré par le concept, primordialement il réalise l' « un » entre l'intelligence elle-même et l'être indéfiniment com-

part confirmée par Bourbaki, et manifestera-t-elle d'autre part, a posteriori, la cohérence de Bourbaki avec lui-même.

A. Le caractère « fermé » de l'entité mathématique est dévoilé par la manière de concevoir le rapport entre les fondements et l'axiomatique.

« Le troisième caractère de la mathématique nouvelle est une sorte de conséquence des deux remarques précédentes. [L'une concerne la critique des fondements, l'autre la précision du vocabulaire] : la meilleure compréhension du problème des fondements, les progrès du vocabulaire et du symbolisme ont permis l'épanouissement de la *méthode axiomatique*. Celle-ci fournit le critère de classement pour la vaste moisson des résultats antérieurement acquis » [49]. L'auteur de ce passage entend ne pas insister sur la « philosophie de la science mathématique » ([1], 34). Il ne conviendrait donc pas de soumettre ce texte à une critique rigoureuse semblable à celle dont a fait l'objet la définition (D). Mais il est légitime de discerner, dans cette déclaration « non formelle », le mouvement de la pensée, en ayant d'ailleurs la certitude que l'auteur, habituellement si précis, n'a pu écrire autre chose que ce qu'il entendait exprimer.

municable immanent à la réalité connue. Par dérivation, le concept est lui-même dit « ouvert », parce qu'il rend possible l'acte en vertu duquel l'intelligence est ouverte à la réalité et par conséquent à l'être en sa communicabilité. Et enfin la « notion » qui est le répondant abstrait de la réalité connue, et qui constitue formellement le contenu du concept est elle-même dite « ouverte » ; la qualification d'un acte étant attribuée à ce en vertu de quoi cet acte a d'être objectivement et immédiatement déterminé.

On voit que la distinction « ouvert-fermé », requise pour situer avec exactitude les entités mathématiques se réfère elle-même aux thèses les plus fondamentales de la métaphysique, notamment la distinction entre l'être et l'essence. Nous ne pouvons que le signaler, non toutefois sans faire observer que le fait d'imposer la « mathématique moderne » entraîne celui d'imposer une certaine philosophie. Il ne semble pas qu'on ait signalé cet aspect de la question, si important cependant au point de vue de la formation.

(49) M. Gilbert Walusinski ([1], 35).

Or si l'on reconnait que « la méthode axiomatique fournit des critères de classement pour les résultats antérieurement acquis », on conçoit par le fait même cette méthode en fonction du domaine formellement mathématique. Cela est aussi légitime que fructueux. Mais comment la méthode axiomatique ainsi conçue peut-elle devoir au moins en partie son « épanouissement [à] la meilleure compréhension du problème des fondements » ? Le « problème des fondements » concerne en effet le rapport que les entités mathématiques soutiennent avec la réalité « pré-mathématique ». Or ce rapport est d'une autre nature que le développement formel de la mathématique. On ne voit donc pas qu'une meilleure connaissance de ce rapport puisse favoriser *positivement* l'épanouissement d'une axiomatique spécifiée par ce développement ?

A moins, cependant d'entendre que la « meilleure compréhension » dont il est question pourrait consister *en fait* à séparer l'axiomatique d'avec les fondements ; les axiomes peuvent alors être énoncés en employant exclusivement un langage formalisé, ce qui permet une meilleure coordination des résultas. Mais, *en fait*, à quel prix ? Séparer l'axiome d'avec le fondement entraine inéluctablement que l'axiome formalisé doit à lui seul fonder la réalité propre de l'entité mathématique [50]. Celle-ci, par le fait même, devient « fermée », c'est-à-dire soustraite à toute interférence avec le « pré-mathématique ».

On voit donc que si le passage cité n'affirme pas explicitement que les entités mathématiques soient du type « fermé », il le suggère comme constituant en fait la seule hypothèse qui permette de l'expliquer. Seule une axiomatique désencombrée, c'est-à-dire désontologisée, peut être entièrement formalisée : condition éminemment favorable pour fournir des « critères de classement ».

(50) A la limite, c'est l'axiome formalisé qui *constitue* la réalité. Si le « Bourbaki » n'est pas acculé à l'affirmer, les logiciens, plus proches de la philosophie, se sont trouvés tenus de le faire. Ainsi Carnap, et le « Cercle de Vienne ». Sur ce point, comme sur d'autres d'ailleurs, Bourbaki n'invente pas ; il suit la tendance qui était dominante au moment de sa « naissance », et il manifeste cette tendance dans le domaine de la mathématique.

B. Le caractère « fermé » de l'entité mathématique est expliqué par le fait que l' « ensemble » est lui-même conçu comme étant une entité « fermée » en vue d'être posé, conformément à l' « ensemblisme », comme constituant le fondement de toute axiomatique.

La notion d' « ensemble », qui constitue, sinon un axiome, du moins une donnée primitive, appelle des observations semblables.

Le « Bourbaki » se garde de définir ce qu'est un ensemble ([14], 15 ; et [14], 2) ; il donne seulement une définition en quelque sorte opérationnelle, en fixant la norme de l'appartenance d'un élément à un ensemble. Mais en fait, l' « ensemble » se trouve ainsi conçu comme s'il pouvait être autonome, c'est-à-dire comme étant indépendant de toute réalité non mathématique, ou autrement dit comme étant une réalité fermée. En voici deux indices.

Le premier est constitué par la mise en œuvre des notions classiques d'extension et de compréhension. Ces mots ne sont pas bannis dans les traités « modernes » [51]. Mais, en fait, la « compréhension » entendue comme un ensemble de données intelligibles non formalisées n'affleure pas.

La relation est, nous l'avons vu, censée être « un ensemble de couples » ; elle n'est pas définie comme telle, comme étant *telle* entité ayant une nature propre. Elle n'est pas définie en compréhension.

Si tel ensemble fini est défini « en extension comme étant la liste complète de ses éléments » ([14], 125), il n'y a pas, corrélativement, pour cet « ensemble amorphe », de définition en « compréhension ». Ce qui, en effet, dans ces conditions, « structure » l'ensemble, ce sont les relations qui peuvent être établies entre les éléments.

(51) Ainsi le traité de Papy les conserve (p. 7).
« Se donner [un ensemble fini], c'est, par exemple, dresser la liste complète de ses éléments (définition en extension). Dans cet état, l'ensemble est dit *amorphe*. » ([14], 125.)
Cf., cependant, le texte cité note 31.

Or ces relations, par le fait même qu'elles distinguent (comment ?) les éléments les uns d'avec les autres, ne peuvent concerner l'ensemble *comme tel*. L'ensemble ainsi décrit en extension est donc caractérisé *comme tel* en fonction des structures dont il est le support abstrait : tout comme l'est l'axiomatique, en fonction des critères dont elle est la possibilité. Les définitions « en compréhension » des notions comme telles se trouvent donc ainsi en fait, écartées.

Nous avons déjà fait (cf page 24) une observation semblable à propos de la différenciation du continu par le nombre de ses dimensions. La qualité propre de chaque continu, qualité à laquelle correspondrait une définition « en compréhension » si celle-ci était possible, cette qualité ne peut plus apparaître si le continu est censé n'être qu'un ensemble de points [52]. Autrement dit, la définition « en compréhension » n'est plus seulement impossible en fait ; elle est rendue impossible en droit. Cette impossibilité ne résulte pas seulement de ce qu'on ignore (provisoirement ?) la nature du continu ; elle tient, en vertu du mode ensembliste de la définition du continu, à ce qu'on prend le parti de ne pas faire état de la nature du continu.

Observons maintenant qu'une notion privée de « compréhension » se trouve par le fait même coupée d'avec la réalité (non mathématique), et conçue par conséquent comme étant « fermée ». Cela est manifeste dans le cas du « continu », puisque la « définition » (?) ensembliste en exclut en fait un élément que la réalité intègre essentiellement, savoir l'ordre (cf. page 24). Mais il en est de même dans tous les cas où la compréhension est en fait écartée car les notes intelligibles qui la composent constituent, *et elles seules*, le medium d'analogie qui assure l'unité entre une réalité pré-mathématique et l'entité mathématique qui lui correspond. Ainsi par exemple, la relation, conçue comme *rapport* entre deux éléments, se retrouve analogiquement, dans le domaine mathématique d'une part, extérieurement à ce même domaine d'autre part. Tandis que la relation, censée être « un ensemble de couples qui vérifient la relation », est une notion qui peut être utile dans le

(52) Par exemple : « Secteur angulaire comme portion de plan, c'est-à-dire comme ensemble (ou partie) du plan considéré lui-même comme ensemble de points. » ([9], 56).

développement formel de la mathématique, mais qui ne peut avoir, nous l'avons montré, aucun rapport avec la réalité.

On doit donc conclure que l' « ensemblisme », en imposant en fait que toute définition soit fondée sur l' « extension », entraine inéluctablement que les notions ainsi définies soient conçues comme étant coupées d'avec la réalité, c'est-à-dire conçues comme ayant le caractère « fermé ».

Le second indice manifestant que l' « ensemble » est conçu, en bourbakisme, d'une manière « fermée », en vue d'être posé conformément au postulat de l'ensemblisme, comme constituant l'origine absolue de l' « axiomatisme », est constitué par la définition du nombre entier naturel. Cette définition est d'ailleurs celle que donna Russell : « tel nombre est la classe des classes [qui lui sont] équivalentes ». On en comprendra la signification en se reportant aux « sept pommes » dont il a déjà été question (cf. page 20). « Sept » n'est pas, et selon le bourbakisme ne peut pas être, un « nombre de pommes ». « Sept » est le nombre d'une « classe » dont cet ensemble de pommes constitue une réalisation. Quelle « classe » ? la même pensera-t-on que si, au lieu et place de pommes, il y avait d'autres objets quels qu'ils soient. Mais cette manière de concevoir suppose que l'on se réfère au concret, et que l'on ait résolu la question soulevée par le rapport concret — abstrait.

Russell vise à écarter cette question en supposant considérées *toutes* les « classes » dont le nombre est « sept ». Le nombre « sept », est alors défini comme étant « la classe de toutes ces classes équivalentes ». On retrouve exactement la même difficulté que pour la définition (D) (pp. 66-72), c'est-à-dire la non prédicativité. Le « definiendum » [ici, « sept », qu'il faut définir] est en effet contenu, *intelligiblement c'est-à-dire en réalité*, quoique que non « formellement » quant à la teneur de l'énoncé, dans le «definiens » [ici les classes dont l'ensemble est posé comme constituant, censément, la classe « définissante », et dont chacune requiert d'être spécifiée par le même nombre « sept »].

Cette difficulté, Bourbaki la connait aussi bien que Russel, évidemment. Mais, dans le formalisme abstrait, dont les symboles n'empruntent plus rien au langage « trivial », la difficulté est artificiellement écartée par une convention ; en sorte que le nombre, défini comme étant une « classe [1] de classes [2] »

est censé l'être indépendamment de tout rapport au concret. L'homogénéité sémantique requiert en effet que le statut de « classe [1] » soit mentalement communiqué à « classe [2] ». Et ce statut est celui d'une entité fermée, puisque « classe [1] » est lui-même construit à partir d'éléments abstraits, savoir les « classes [2] ».

C'est donc expressément à la condition de concevoir comme étant des entités fermées les classes qui interviennent dans la définition du nombre, que Russell et Bourbaki à sa suite, réussissent apparemment à donner du nombre une définition purement formelle.

Nous refusons le processus, aussi bien dans le cas du nombre que dans celui de la « définition » (D), parce que ce processus n'est pas conforme aux normes de la logique réaliste.

Nous ne répétons pas l'analyse critique que nous avons développée pp. (66-72) ; mais nous insistons sur le fait que cette difficulté, en réalité non surmontée, et venant de ce que les entités mathématiques sont conçues comme étant « fermées », cette difficulté, donc, montre que si on cherche à concevoir celle-ci de cette manière, on aboutit à une impossibilité.

C. Les connexions qui existent entre les entités mathématiques ne seraient censément pas, en bourbakisme, référées à la notion métaphysique de vérité. Elles sont pour autant conçues d'une manière « fermée ».

Les connexions entre les entités mathématiques sont conçues, en bourbakisme, de la même manière que ces entités elles-mêmes.

On devait l'attendre, car l'édifice bourbakien constitue, au point de vue logique, un *système* parfaitement cohérent avec lui-même. On n'en peut douter, en raison des témoignages les plus autorisés. Citons celui de M. le Professeur J. Dieudonné :

« Pour ma part, je ne vois pas ce qu'il y a de mal ou de déshonorant à partir d'une prémisse qui n'est pas un axiome, mais qui peut être un énoncé très compliqué, pourvu que l'on puisse démontrer sans faute logique que l'énoncé en question

en implique un autre ; non seulement cela serait beaucoup plus instructif, mais cela montrerait sous son vrai jour la nature de la déduction logique, et son caractère *relatif*, trop souvent voilé par la façon dont on l'embrouille avec la notion métaphysique de vérité... » (J. Dieudonné [1], 3).

On a toujours distingué la « logique formelle » de la « logique matérielle ». La première considère seulement les rapports que soutiennent entre elles les propositions, la seconde considère également le rapport de celles-ci avec la réalité qu'elles signifient. Et il est clair que le développement formel de la mathématique ressortit précisément à la logique formelle.

On ne peut que reconnaitre, comme on l'a toujours fait en raison même de la logique, et sans qu'il soit besoin de faire appel à l'honneur ou à l'éthique, le bien-fondé de ce que déclare *positivement* M. J. Dieudonné. Rigoureuse en elle-même et absolue dans son ordre, la déduction logique est *relative* en même temps que les prémisses dont elle est le développement. Tout comme d'ailleurs l'intelligence ne laisse pas d'être relative à la réalité, en l'acte même de son exercice rationnel. C'est là une fort ancienne vérité, que l'école a toujours professée, mais on est aise de reconnaitre qu'il est fort opportun de la rappeler. Actuellement en effet, l'orientation générale de la pensée, l'effervescence du pan-mathématisme en particulier, enrobe dans un constructionisme cérébral censé être un absolu le rapport que l'intelligence soutient avec la réalité. Tandis qu'en vérité, la logique, qui est « formellement » expressive des lois de l'esprit, est « relative à » comme l'esprit l'est lui-même ; on ne le rappellera jamais assez.

Nous ne voyons donc pas comment « la nature de la déduction logique, et son caractère relatif » pourraient être « voilés par la notion métaphysique de vérité ». C'est qu'en effet, les normes de la déduction logique expriment une vérité *qui requiert ele-même comme étant son fondement la vérité métaphysique*. En sorte que, le caractère relatif de la déduction logique étant considéré comme un fait, il suffit, pour en montrer le « comment », et il est nécessaire, pour en démontrer l' « exister », de référer ce fait à la notion métaphysique de vérité. Que peut dès lors signifier l'allégation de M. le Professeur J. Dieudonné ?

La distinction « ouvert-fermé », qui concerne primordialement l'acte d'intelligence, s'applique par dérivation aux instruments qui sont aptes à manifester la nature de cet acte. Or, celui-ci pouvant être envisagé soit comme posé distincte-

ment, soit comme faisant partie d'un enchainement, la distinction « ouvert-fermé », qui vaut nous l'avons vu pour le concept (48), vaut pour la logique également.

La logique « ouverte » est celle qui, sans méconnaitre la distinction entre les deux espèces, l'une métaphysique, l'autre logique, de la vérité, reconnait la subordination nécessaire de la seconde à la première. La logique « fermée » est celle dont on prétend qu'elle peut et doit ne comporter aucune référence à la notion métaphysique de vérité.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser qu'elle est concrètement la portée de ce qu'allègue M. J. Dieudonné. Il s'impose qu'au point de vue pédagogique il faut « montrer sous son vrai jour la nature de la déduction logique et son caractère *relatif* ». On en conclut, en perspective « classique », qu'il faut, par le fait même, référer la déduction logique à la vérité métaphysique ; c'est-à-dire qu'il faut adopter une logique « ouverte ». Et on en conclut, en bourbakisme, juste le contraire ; c'est-à-dire qu'il faut adopter une logique « fermée ». Il s'ensuit qu'imposer la mathématique moderne qui est d'inspiration bourbakienne, c'est imposer *insidieusement* une certaine philosophie. Car c'est trancher sans même la poser, une question qui est en droit toujours ouverte, comme elle est en fait sans cesse renaissante.

Est-il opportun d'insister sur la gravité de l'enjeu ? Cette gravité devrait apparaitre avec évidence, puisque du seul point de vue de la mathématique, le choix ségrégatif de la logique « fermée » entraine de ruineuses conséquences alors qu'il parait être bénéfique. « Fermer » la logique c'est-à-dire exclure la logique « ouverte » et pas seulement en distinguer une logique conditionnellement « fermée », c'est en effet priver la vérité logique elle-même de son fondement ; et c'est en conséquence abolir au sein de la logique la notion même de vérité.

Les faits d'ailleurs le confirment : dans les systèmes purement formels, le « valable » remplace le « vrai ». La mathématique, moins proche de l'épistémologie que ne l'est la logique, peut éviter l'écueil de ce conformisme stérile ; mais elle le doit à un compromis qui n'est pas compatible avec la formalisation complète que réalisent les systèmes logiques. La notion métaphysique de vérité est en effet toujours sous-jacente au raisonnement mathématique *réel*, nous voulons dire à celui que *fait* le mathématicien. Il n'y a certes « rien de mal ou de déshono-

rant à partir d'une prémisse » *quelconque*. Mais précisément, au moment où on en *part*, on la suppose soit *vraie* soit *fausse* ; et non pas « valable ». Car, du « valable », on ne peut rien déduire, sinon au moyen de règles extrinsèques posées a priori. Le « valable » ne peut être qu'une épitaphe. A partir du vrai au contraire, on peut rechercher la vérité, en explicitant un contenu qui lui est immanent.

Bourbaki, mathématicien en acte de raisonner, s'évade donc hors la systématisation bourbakienne ; laquelle vise, sans d'ailleurs y réussir, à conférer aux raisonnements mathématiques le statut d'une entité fermée, puisqu'elle l'isole de la vérité et le prive par le fait même de toute référence à la réalité. Faut-il ajouter qu'il revient à Bourbaki « en acte » d'être dans la vérité ? Qu'il veuille donc bien ne pas imposer « aux autres » une erreur de laquelle il est lui-même préservé, mais dont fort peu auront la possibilité de se libérer.

Terminons ce paragraphe par une réflexion quelque peu humoristique venue d'outre Manche, et qui constitue la meilleure réponse au slogan devenu célèbre : « A bas Euclide ! » ([1], 2).

« Pour presque tous les enfants britanniques, l'enseignement mathématique doit comporter en lui-même son intérêt immédiat, et non se présenter comme une introduction à quelque chose d'autre. Rien ne prouve que les mathématiques sophistiquées conviennent à tous et ne doivent pas être réservées aux mathématiciens professionnels... Certes, dans notre enseignement, il est clair que les structures fondamentales finissent par émerger. Sinon, comment aurions-nous l'espoir de communiquer des notions hautement sophistiquées ? La logique, comme le whisky, est meilleure à petites doses, pensons-nous. » ([1], 9).

La « sophistique » n'est évidemment pas dans le développement formel de la mathématique, mais bien dans le fait de présenter comme étant auto-consistantes des entités qui ne peuvent avoir de réalité et n'être support de vérité que si l'esprit, en les forgeant, en respecte la nature, et les reconnait comme étant essentiellement surbordonnées.

2. Les connexions entre les entités mathématiques, non moins que ces entités elles-mêmes, sont conçues, en bourbakisme, comme étant coupées d'avec l'acte de l'esprit qui les crée, et comme étant isolées de l'opération dont elles sont en réalité l'expression.

Cette affirmation paraitra probablement paradoxale, attendu que les « réformateurs » tiennent à se présenter sous les auspices de la « méthode active ». Mais les mots « acte », « actif », ne désignent-ils pas en fait l'impérieuse contrainte que crée une extraversion collective ? Comment pourraient-ils, dans ces conditions, être référés, comme ils doivent l'être primordialement, à l'unité du rapport créé précisément par l'acte de l'esprit entre celui-ci et l' « objet » qu'il saisit. « Acte », « actif » ne peuvent évidemment avoir cette seconde acception que si l' « objet », fût-il à un certain point de vue reconstruit par l'esprit comme c'est le cas pour l'entité mathématique, est *radicalement* indépendant de l'esprit, autrement dit s'il est un abstrait ouvert. Si l' « objet » est, ou plus exactement est censé être, un abstrait fermé, il est ipso facto conçu comme étant créé exclusivement par l'esprit, et il ne peut se distinguer de l'acte de l'esprit en l'instant où cet acte est posé. L' « objet » est alors résorbé dans l'acte exercé, et il ne peut recouvrer raison d' « objet » qu' « après » ; *après*, ontologiquement, c'est-à-dire en étant fictivement mis en opposition avec l'acte dont cependant il reçoit exclusivement sa réalité.

Autrement dit, l'entité « fermée » ne peut devenir un « objet » qu'en étant isolée de l'acte au sein duquel elle est née. Les deux caractères sont donc en fait nécessairement liés : être conçu d'une manière fermée, être coupé d'avec l'acte de l'esprit qui conçoit. Le premier est plus manifeste pour les entités elles-mêmes, le second pour les connexions que celles-ci

soutiennent entre elles. Mais l'un rend compte de l'autre ; et l'on n'est pas surpris, si l'on observe le bourbakisme, de les y trouver associés l'un à l'autre. Nous avons examiné au précédent paragraphe, le caractère « fermé » des entités et de leurs connexions ; nous allons maintenant observer que le caractère « isolé » des connexions rejaillit en quelque sorte sur les signes qui sont en fait considérés comme étant des entités fermées.

Nous nous référons, dans ce paragraphe, à la notion d' « acte », telle que l'entend la métaphysique.

Nous ne sortons pas pour autant de notre sujet, bien au contraire. L'enseignement est en effet communication [53]. Or, ce qui est éminemment communicable, c'est l' « acte ». Et cela pour des raisons qui s'enchaînent : premièrement, l'être, et lui primordialement, est par nature communicable ; deuxièmement, ce qui, en chaque genre, « est » au maximum, c'est l' « acte ». Dans l'ordre intelligible, l'acte c'est le jugement. La norme en est la vérité. Qu'il s'agisse donc d'appréhender la vérité pour soi ou de l' « enseigner » à un autre, il faut toujours rendre effective, par un acte, la communicabilité de l'être en tant que celle-ci ressortit formellement à l'esprit sous la forme du vrai. On communique à l' « autre » en l'induisant à porter sur un « objet » déterminé le jugement que l'on porte soi-même. Et l' « autre » reçoit, dans la mesure où il perçoit la conformité de ce jugement avec la vérité qui en est la norme.

Telle est la plus importante des raisons pour lesquelles l'enseignement de type « magistral » est indispensable. Ce type d'enseignement est nécessaire, les réformateurs en conviennent, pour achever les programmes en un temps limité ([2], 6 b). Mais il y a beaucoup plus. Si, comme le remarque, si pertinemment à notre avis, M. Revuz, « il ne s'agit pas d'enseigner une science toute faite mais de faire acquérir un mode de pensée » ([13], 66), nous ajoutons que « faire acquérir un mode de pensée », *c'est* faire acquérir l' « habitus » de *juger vrai* à qui exerce ce mode de penser, et qu'on acquiert l' « habitus » par l' « acte ». L'enseignement magistral doit, de soi, multiplier les occasions d'exercer l'acte de juger. Le mettre « en veilleuse », et le remplacer par la dite « méthode active », s'accompagne en fait d'une sorte de désertion à l'égard de l'acte véri-

(53) Communication : de choses connues, du sens de la vérité, de l'instinct de la vérité. « Tête bien pleine, tête bien faite. » — L'objet de l'enseignement peut et doit être indéfiniment exhaussé. Quoi qu'il en soit, l'acte d'enseigner consiste toujours en une communication.

table. Nous y reviendrons dans la troisième partie, consacrée à la remise en question de la pédagogie. Examinons pour le moment la situation qui est faite à l'acte dans la présentation moderne. Il y a, de cette situation, deux symptômes ; l'un concerne l'exercice du jugement, l'autre le rôle du signe. Précisons successivement l'un et l'autre.

A. La situation, faite en bourbakisme, à l'acte de l'intelligence, est manifestée par le rôle qui y est attribué à l'acte de juger.

Nous avons déjà observé que l'enseignement moderne ne met plus en évidence ni les principes du raisonnement ni en fait leur application (cf. pp. 30 sv.).

Voici deux observations, plus précises et plus typiques, qui concernent l'acte de juger. Les plus subtils des glissements sémantiques qui aboutissent en fait à l'éviction de cet acte consistent, nous l'allons voir, à substituer à l'acte lui-même, soit l'ensemble des conditions dont il intègre l'unité, soit le résultat dont il rend compte sans le démontrer.

Le bourbakisme substitue à la réalité qu'est l'acte de juger, les réalités qui en constituent les présupposés.

« Nous sommes là aussi en désaccord avec la lettre des I.O. de 1945 : ' Le signe = sépare l'indication d'une opération à faire, de son résultat '. 2 + 5 = 7. Il vaut mieux, pour les enfants, que 2 + 5 soit une expression achevée en quelque sorte, pour ensuite reprendre son souffle et lui trouver des synonymes, par exemple 7 » [54].

Il s'agit, il est vrai, de la classe de 6°. Mais, nous le répétons, l'enfant est ouvert à toute la vérité, dès le premier éveil de l'intelligence. C'est donc dès le premier enseignement qu'il importe par dessus tout de former à bien raisonner et à bien

(54) Madame TOUYAROT. Vers une éducation mathématique moderne à l'école élémentaire ([7], 38).

juger. Or le passage cité, s'il énonce une donnée de bon sens que retrouve tout pédagogue consciencieux, n'en est pas, pour autant, moins insidieux. Il insinue même une erreur radicale. Et nous disons « radicale », parce que cette erreur affecte l'essence même de ce dont il est question. Kant a disserté sur « 7 + 5 = 12 ». On peut n'être pas d'accord avec lui, nous avons eu l'occasion de l'expliquer [55]. Mais quelle que soit la qualification qu'on juge devoir attribuer à « 7 + 5 = 12 », force est d'observer que, même pour Kant cependant « idéaliste », il s'agit là d'un *jugement*. Il s'agit d'un *acte* en lequel l'esprit affirme l'unité entre deux entités perçues chacune respectivement, et comme étant distinctes l'une de l'autre par conséquent : « réellement » distinctes, conformément au type de réalité qui est en propre celui du domaine envisagé. Il n'est pas exact que « 7 » soit seulement un « synonyme », entre autres, de « 2 + 5 ». Car, dans le domaine mathématique, à un point de vue si peu « réaliste » que ce soit, et pour Kant lui-même, « 2 + 5 » d'une part, et « 7 » d'autre part, sont des entités réellement distinctes l'une de l'autre. Et le jugement « 2 + 5 = 7 », consiste précisément à affirmer que ces deux entités distinctes sont « *un* » à un certain point de vue qui est celui de la *quantité* ; c'est-à-dire qu'elles sont *égales*, « égales » et non pas « identiques » nous y reviendrons au paragraphe suivant.

C'est seulement si l'on conçoit ces entités comme étant « fermées » que leur distinction cesse d'être fondée. Alors, l'égalité n'est plus l'expression d'un jugement : elle se dégrade en synonymie. Et *il n'y a plus d'acte de juger* ; ou, pour reprendre le terme de la lettre des I.O. de 1945, il n'y a plus d'*opération*, « opération » désignant concrètement au point de vue mathématique la même réalité que « acte » au point de vue métaphysique.

Le bourbakisme est donc « en désaccord avec la lettre » : nous n'avons pas à prouver ce qui est explicitement avoué. Mais il faut bien comprendre que ce désaccord n'est pas un accident résultant d'un affrontement entre deux procédés pédagogiques différents ; il manifeste en réalité l'essence même du bourbakisme, *du bourbakisme comme tel*, quoi qu'il en soit de tel mathématicien *en acte*, qui fait profession de bourbakisme quand il *ne fait pas* de mathématique.

Conçues en effet comme étant fermées, les entités ma-

(55) M.-L. Guérard des Lauriers. L'activité de jugement en mathématiques. Revue des sciences philosophiques et théologiques ; tome XXV, 1936 ; pp. 76-103.

thématiques ne peuvent plus constituer le support de l'acte de juger. Ne pouvant jouer vis-à-vis de cet acte le rôle de présupposés, elles sont censées en assumer la réalité ; elles deviennent dès lors en fait l'unique objet de l'affirmation, et cela au détriment du jugement dont elles scellent par là-même l'éviction. Le bourbakisme ne peut donc être qu'en désaccord avec la lettre des I.O. de 1945, laquelle interprète le signe = comme étant celui d'une « opération à faire », c'est-à-dire comme étant le signe d'un « acte ».

La juste observation que fait Mme Touyarot au point de vue pédagogique confirme ce qui précède : « Il vaut mieux pour les enfants que 2 + 5 soit une expression achevée en quelque sorte, pour ensuite reprendre son souffle... » Chacun sait que, pour affirmer, en l'acte de juger, l'unité de deux réalités distinctes, il faut avoir préalablement appréhendé chacune de ces deux réalités comme « quelque chose d'achevé ». Ce peut être plus difficile pour les enfants, mais c'est vrai pour tout le monde.

L'errance commence avec le fait de ne pas dire pour « 7 » ce que l'on dit pour « 2 + 5 ». Et l'errance se consomme dans le fait de *refuser* que l'unité entre ces deux « expressions achevées en quelque sorte », soit affirmée dans une *opération* qui est expressive d'un jugement de vérité. Voilà donc un premier processus qui aboutit en fait à l'éviction de l' « acte » : substituer à celui-ci l'ensemble de ses conditions, ensemble rendu amorphe parce que l'unité en est privée du principe qui seul le fonde véritablement, savoir l' « acte », et réduite à une « synonymie » de nature extra (ou infra) mathématique.

Le bourbakisme substitue à l'acte de juger le résultat qui en manifeste l'effectuation, et qui paraît dès lors fallacieusement pouvoir être objet de démonstration.

Le second processus de dégradation de l'acte consiste à lui substituer le résultat dont en réalité, il rend compte sans le démontrer.

Ainsi par exemple, tel traité présente comme étant « démontré » le fait qu'entre deux entiers naturels x et y se trouve vérifié l'une des trois relations (au sens « trivial ») : $x < y$, $x > y$, $x = y$ [56]. Or ce fait tient à ce que, premièrement, l'*acte* d'ordonner (les entiers naturels) présuppose ces conditions,

(56) [9], classe de 5ᵉ, ch. 9.

attendu qu'elles sont celles de sa propre effectuation ; à ce que, deuxièmement et en conséquence, l' « ordre » qui résulte de cet acte d'ordonner réalise, lui également, ces mêmes conditions. Si on laisse de côté l' « acte », l'ordre qui en est le résultat présente des propriétés qui paraissent être objet de démonstration, alors qu'elles résultent de l'acte en même temps que l'ordre lui-même. C'est un cas de « démonstration-mirage » ; cas en lui-même sans importance, qui ne vaut d'être relevé que parce qu'il est symptomatique. L'appellation « démonstration » ne peut paraître, en l'occurrence, légitime que parce que le véritable principe de l'explication n'est pas considéré. Et ce principe, c'est l'*acte*, l'acte d'ordonner.

Et il convient d'observer derechef que cette éviction de l'acte entraine, pour l'entité qui lui correspond, ici au titre de résultat, d'avoir le caractère « fermé ». L'ordre, qui en réalité résulte de l'acte d'ordonner, devient en effet, coupé de cet acte, un « en soi » ; le signe en est qu'on croit démontrer même les propriétés que cet ordre possède tout simplement par construction.

B. La situation faite en bourbakisme, à l'acte de l'intelligence, est manifestée par le rôle du signe.

Le rôle joué en fait par le signe, dans l'enseignement « moderne » de la mathématique, manifeste également la situation qui y est faite à l'acte de l'intelligence.

L'acte constitue le principe radical de toute communication ; s'il procède d'une intelligence incarnée, il intègre toujours un signe au titre d'instrument. Cela est vrai de l'acte par lequel la vérité est communiquée à un autre, par exemple dans l'enseignement ; cela est vrai, originellement, de l'acte au sein duquel la vérité se communique à l'esprit immédiatement, que cet acte d'ailleurs consiste à découvrir la vérité ou à l'appréhender. Or l'intégration du signe dans l'acte de la communication présente un mode propre et distinct en chacun de ces trois cas : enseigner, découvrir, appréhender. Cette différenciation, délicate, du rapport qui toujours existe entre le signe et l'acte de l'esprit, ne peut évidemment subsister et être comprise, qu'en vertu de l'acte lui-même. Que celui-ci soit en fait écarté, cela donc se

trouve manifesté si les situations respectives du signe ne sont pas exactement différenciées. Or c'est cela qu'on observe en fait, dans la « mathématique moderne » telle qu'elle est enseignée.

Le signe et l'acte d'enseigner.

Tout d'abord en effet, le signe comme instrument sensible d'une communication faite à l' « autre » ne doit pas se trouver substitué à ce dont il est signe et seulement signe.

On l'a toujours admis, même en ce qui concerne la géométrie. C'est ce que rappelait l' « adage » : « raisonner juste sur les figures fausses » ; ce serait impossible, si la figure était la réalité elle-même. Or, nous l'avons observé, la substitution de la résolution algébrique à la résolution arithmétique, puis du graphe à l'équation, ou bien d'un arbre de situation à un enchaînement de propositions, a inéluctablement pour conséquence d'induire les enfants dont l'imagination est si vive, à résorber dans le signe la réalité intelligible. Comment d'ailleurs l' « enseigné » pourra-t-il discerner si la relation est un ensemble de couples, ou même un ensemble de flèches ; ou bien si la flèche est seulement le signe de ce que le couple vérifie la relation, ou si elle constitue l'essence même de la relation ; ou bien enfin si l'ensemble des flèches ne serait pas la relation elle-même, puisque le nombre de flèches est précisément le nombre qui peut être attaché à la relation [57] ? Comment l' « enseigné » ne

(57) La relation de l'ensemble E à l'ensemble F est l'ensemble des couples (e, f) [ou un sous-ensemble de tels couples « vérifiant la relation » ; mais nous pouvons, à notre présent point de vue, laisser de côté cette clause que nous avons déjà examinée] : e étant élément de E, et f élément de F. Le nombre de ces couples est le nombre des flèches qui vont de « un e » vers « un f ». Ce nombre (des flèches) est également le cardinal produit des deux cardinaux de E et de F, lequel est par définition même le cardinal du produit cartésien de E par F, ou du produit cartésien de F par E.

Or, quelle peut être la distinction entre, d'une part relation de E vers F, d'autre part le produit cartésien de E par F ? attendu que : premièrement, la relation de E vers F étant définie comme l'ensemble des couples (e, f) [« qui vérifient la relation »], elle est la même chose que le produit cartésien de E par F, lequel est, lui également, l'ensemble des couples (e, f) ; deuxièmement, la relation de F vers E se distingue de la relation de E vers F, exactement

prendrait-il pas spontanément le « signe » comme position de repli, si le maître déclare « avoir envie » de le faire ?[24]

Force est donc d'observer qu'en ce qui concerne le premier aspect de la communication, celui qui est propre à l'enseignement, le signe éclipse pour ainsi dire la notion, dont concrètement il remplace la définition. L'intelligence se trouve donc contrainte en fait, pour exercer son acte, de se subordonner au signe qu'elle devrait en droit prendre pour instrument. Et comme un tel acte ne peut, en raison de sa nature, être sous-mesuré, il risque d'être, en réalité, écarté.

Le signe et l'acte de découvrir.

Objectera-t-on qu'en mathématiques : « au commencement est le signe ! » ; en sorte que, loin de sous-mesurer l'intelligibilité, le signe en est, en l'occurrence, le principe ?

C'est vrai, mais il faut l'entendre.

Il faut entendre que « le signe est au commencement », en ce sens qu'il est une composante intégrante de l'acte de découvrir, dans le cas de la mathématique comme d'ailleurs dans tout autre cas. Cet acte, en tant qu'il ressortit à l'esprit, se trouve différencié de tout autre par le « jugement négatif » qui lui est concomitant : le génie consiste d'abord à écarter les questions parasites[25]. Mais ce même acte de découvrir a également en propre, si on le considère en son intégralité, de porter

comme le produit cartésien de F par E se distingue du produit cartésien de E par F, à savoir par l'inversion de l'ordre pour chaque couple, (e, f) donnant (f, e) : c'est-à-dire que le même principe de différenciation vaut soit pour la relation soit pour le produit cartésien.

Et s'il n'est pas possible de distinguer l'un de l'autre le produit cartésien et la relation, puisqu'ils ont, nous venons de le voir, la même définition ensembliste, alors le nombre cardinal du produit cartésien est également celui de la relation. Or le nombre cardinal du produit cartésien est, on l'a rappelé, le nombre des flèches. Il s'ensuit que le nombre de la relation, c'est le nombre des flèches. Dès lors, et d'autant plus que dans la vue ensembliste l'extension est « dominante » par rapport à la compréhension, « la relation n'est-elle pas l'ensemble des flèches » ? L' « enseigné » se trouvera irrésistiblement induit à le penser, non sans dommage nous l'avons expliqué.

simultanément sur l'idée, laquelle est nous venons de le rappeler circonscrite négativement, et sur les instruments qui de soi sont aptes à exprimer celle-ci positivement et, en l'instant où l'acte est posé, c'est la découverte de l'instrument qui, par priorité, réalise, au bénéfice de l'esprit, la communicabilité de la vérité dont l'appréhension effective de l'idée scelle l'achèvement.

Le signe est donc « au commencement de la mathématique », en tant qu'il exerce une indispensable médiation au sein même de l'acte sans lequel la mathématique n'existerait pas, savoir l'acte de découvrir. L'ultime « jugement négatif » dont le rôle propre consiste à écarter ce qui serait étranger à la notion nouvelle encore non découverte, se mue en l'appréhension positive de l'entité-idée qui devient ainsi l'objet dont il y a découverte. L'unité entre ces deux aspects, distincts et indissociables, du même acte repose sur la médiation exercée par la découverte du signe. Celle-ci, d'une part, en tant qu'elle est acte, concourt à fixer l'esprit dans le jugement négatif auquel elle est concomitante ; et, d'autre part, en tant qu'elle a un contenu, savoir le symbole signifiant, rend possible et inaugure, au sein de l'acte de découvrir, la saisie positive dont l'entité-idée est l'objet et dont le signe est à la fois l'instrument et l'expression.

Puis donc que le signe est « au commencement », en tant qu'il intègre l'unité, et pour autant conditionne la réalité, de l'acte en vertu duquel la vérité se trouve communiquée, le signe se trouve privé de sa fonction propre, et lui-même dégradé, si l'apprentissage en est fictivement assimilé à la communication de la vérité. Nous l'avons déjà observé en ce qui concerne cette forme de communication qui est propre à la pédagogie ; cela est vrai également, quoique plus subtilement, nous l'observons maintenant, de la communication de la vérité qui est immanente à l'esprit.

La mode est à la créativité [58] ; or une mode n'est en général

(58) Nous donnons au mot « créativité » le sens qu'il a habituellement dans le langage contemporain. Et pareillement, nous entendons le mot « création » en un sens large, et non selon l'acception précise qu'il a en métaphysique, à savoir : production absolue, sans référence à aucune réalité déjà existante (cf. note 86). Nous appelons « création au sens large » celle qui a formellement pour objet l'ordination nouvelle d'un donné préexistant. L'esprit créé peut créer de l'ordre, créer « un ordre ». Mais il ne peut créer la « matière » (entendue en un sens analogique), sans laquelle cet ordre ne peut être réel.

quelque peu durable dans l'ordre mental qu'en colportant un produit de remplacement, un ersatz inauthentique à l'usage des snobs, mais qui paraît cependant répondre à une attente en elle-même légitime. Il est à craindre que la « mathématique moderne » ne suive la loi de la mode, au moins sur ce point. Penserait-on stimuler, chez l'enfant ou chez l'adulte, la « créativité », en exerçant le débutant au maniement de signes *déjà créés ?* Ce serait, selon nous, une erreur. Car, nous venons de le rappeler, l'acte de découvrir porte simultanément et indissociablement sur l'entité-idée et sur le signe qui en est l'expression. Les algorithmes déjà créés peuvent, s'ils sont maîtrisés, concourir à l'acte de découvrir ; ils peuvent, en retour, en paralyser l'éclosion, si leur utilisation habituelle induit l'esprit à se placer toujours au même point de vue. Le fait même que ce bénéfice et cet écueil soient également possibles confirme que créer d'une part, maîtriser l'usage d'instruments déjà créés d'autre part, sont choses de nature différente. La première est, dans l'ordre mental, toujours bonne, parce qu'elle manifeste la vérité ; la seconde est soit bonne soit mauvaise selon qu'elle favorise ou dessert la première.

C'est donc abuser des mots, et pour autant tromper, que d'appeler « éducation de la créativité » un exercice visuel et graphique qui développe seulement dans les sens et dans la mémoire sensible une certaine agilité. C'est abuser de l'enfant, en flattant ses penchants, que de favoriser de sa part une sorte de débauche dans l'usage du signe. Cet actionisme détourne en quelque sorte la sève mentale vers la périphérie, et parasite l'acte de la véritable réflexion, lequel, lui et lui seul, achemine les mieux doués à l'authentique création. Le productivisme que provoque la surenchère accordée au signe risque de dévorer l'acte qui est de soi ordonné à découvrir l'entité-idée. Une « créativité » qui prendrait directement pour objet « le signe » serait inéluctablement vouée à avorter.

Pas n'est question évidemment, par ces observations, de proscrire le signe. Bien au contraire, il convient d'en fonder le « droit de cité » sur la plus haute des fonctions qu'il puisse exercer. S'il est fait du signe un usage qui voile ou même « amalgame » l'acte de découvrir, acte dont le signe et lui seul peut et doit intégrer l'unité, le signe perd sa valeur parce qu'il ne peut plus être « au commencement de la mathématique ». En faisant observer que cet écueil est pour le moins possible dans la présentation moderne de la mathématique, nous ne faisons donc que rappeler quel est l'ordre véritable. Absolu-

ment : « au commencement est l'acte », acte en quoi consiste la communication de la vérité. Et, par suite, mais ensuite seulement : « au commencement est le signe » ; puisque la création du signe réalise, au sein de l'acte de découvrir, la médiation qui en assure l'unité.

Le signe et l'acte de signifier.

Le signe intervient enfin en tout acte d'appréhension intelligible, même lorsqu'un tel acte ne consiste pas à découvrir. Qu'en est-il, à cet égard, du rôle joué par le signe en mathématiques ?

L'invention, la mise en œuvre, et puis au moins provisoirement la fixation, se présentent pour le signe de la même manière que pour tout aspect relativement contingent de la science elle-même ; elles sont, dans leur ensemble, conformes aux lois de l'induction. On tient en effet pour normal qu'un signe soit remplacé par un autre. Une telle substitution entraîne d'ordinaire que différents aspects de la réalité signifiée soient tour à tour mis en évidence. Ce processus, lui aussi, est réputé « normal », parce qu'il se présente, non sans facticité, comme réalisant le permanent dépassement des limitations récemment expérimentées. Mais, fût-il décidé à la majorité, le « valable » n'est pas le vrai. Et une chose n'est vraie, ou si l'on veut authentique, que si la réalisation en est conforme à la nature. En l'occurrence, la substitution, légitime, d'un signe à un autre, et même d'un mode de signifier à un autre mode de signifier, ne doit pas s'accompagner d'une altération concernant l'essence, la situation, et la fonction du signe.

Or le signe est logiquement postérieur, parce qu'ontologiquement subordonné, à ce qu'il signifie.

Cette seconde clause est particulièrement importante, et délicate, en mathématiques. Nous venons en effet de le rappeler, le signe est découvert dans le même acte et en même temps que l'entité-idée ; la distinction entre signe et signifié n'apparaît donc pas originellement, c'est-à-dire dans l'acte de découvrir en tant qu'il est une expérience, mais seulement à la réflexion : en sorte que la réalité en est parfois contestée, comme si elle était seulement l'expression, « projetée » par l'esprit, d'une analyse de l'acte de découvrir faite a posteriori. Affleure ainsi, encore une fois, la question que nous ne pouvons ici examiner : quelle « réalité » convient-il d'attribuer à l'entité mathématique ?

Il suffit pour notre propos, d'observer que si on refuse le caractère réel de la distinction entre signe et signifié, on est inéluctablement conduit à *identifier* l'entité mathématique avec le signe graphique (flèche, lettre, figure...). Or cette thèse ne répond pas à la réalité « vécue ». L'évidence mathématique, même si elle prend appui sur les signes d'ordre sensible, se résout en effet dans l'esprit. Cela suffit à prouver que l' « objet » dont il y a évidence est distinct du symbole qui l'évoque et en fixe l'appréhension. La thèse du positivisme logico-mathématique étant inacceptable, il s'ensuit que, même en mathématique, le signe est distinct du signifié, et lui est par conséquent subordonné.

Les réformateurs savants, eux qui ont conçu la réforme, l'admettent évidemment, parce qu'ils ont l' « expérience » : le signe est essentiellement subordonné à l'entité-idée. Mais ceux qui seulement appliquent la réforme, que ce soit d'ailleurs par soumission ou par conviction, subvertiront cette vérité, c'est-à-dire qu'ils en suggéreront le contraire par leur comportement spontané.

La raison en est fort simple. Qui invente un signe, en vue de mieux exprimer ou de mieux communiquer l'idée déjà appréhendée, ne peut évidemment altérer ni le rôle ni par conséquent la situation du signe. Si, au contraire, on n'accède à l'idée qu'à partir du signe, celui-ci joue en fait un rôle prépondérant au lieu de demeurer subordonné.

Mais, dira-t-on, serait-ce là un écueil nouveau ? Écueil que véhiculerait avec elle la mathématique moderne ? L'entité mathématique n'est-elle pas une réalité si subtile qu'il est impossible d'y accéder autrement qu'à partir d'un signe ?

Nous répondons que le bourbakisme crée une situation nouvelle, précisément parce qu'il remplace par une systématisation d'ordre axiomatique le rapport que l'entité mathématique soutient avec la réalité « ordinaire ».

Le signe a toujours été nécessaire, et reconnu comme tel ; mais l'épistémologie « classique » admet qu'à la faveur d'un processus il est vrai trop peu explicité, le signe renvoie *en définitive* à des notions qui constituent, dans l'ordre intelligible, l'expression immédiate de perceptions primitives. Perceptions et notions qui, toujours selon la vue « traditionnelle », sont censément communes à tous, parce qu'elles correspondent à la nature de l'intelligence rationnelle. Dans cette même vue, il est donc fondé en droit que le signe soit subordonné, et qu'il puisse

par conséquent être modifié sans que le soit la réalité signifiée, que celle-ci soit considérée en propre dans le domaine mathématique ou selon son aspect métaphysique.

Or, ce rôle du signe se trouve, dans la présentation moderne, pour ainsi dire inversé. Revenons encore une fois à la notion de relation et à la flèche qui lui est associée. Le signe n'est plus présenté comme étant postérieur à la réalité mathématique, et comme étant inventé en vue de la mieux exprimer. Le signe, au contraire, est antérieur à l'entité mathématique, celle-ci devant d'ailleurs en être séparée. Et comme le signe ne laisse pas cependant d'évoquer utilement, même au point de vue de la mathématique, l'entité métaphysique à laquelle il correspond, il se trouve nous l'avons vu hypothéqué d'une radicale ambiguïté.

Rappelons comment. Supposée tracée la flèche reliant les deux éléments d'un couple ordonné qui appartiennent respectivement à l' « ensemble de départ » et à l' « ensemble d'arrivée », la rigueur formelle du langage strictement mathématique n'autorise pas à dire que « la relation » (au sens mathématique de ce mot) soit un ensemble de telles flèches. Mais tout se passe en fait, même en mathématique, comme si on le disait, puisque les définitions nouvelles des notions de fonction, application, surjection, injection, bijection, sont en réalité fondées sur la correspondance ordonnée entre l' « ensemble de départ » et l' « ensemble d'arrivée », et que cette correspondance ne reçoit aucune désignation précise, sinon justement celle de « relation ». D'ailleurs, les qualités de cette correspondance, qualités qu'explicitent les définitions en question, ne sont autres que celles de la relation entendue *au sens mathématique* ; et elles sont signifiées par la « flèche », du fait que celle-ci est « efférente » en l'une de ses extrémités, « afférente » en l'autre extrémité.

La flèche exprime donc bien, d'une part la donnée intuitive de relation telle qu'elle se réalise dans le prédicament quantité, d'autre part ce que *fait* Bourbaki, et même ce qu'il voudrait, pour pouvoir le faire, avoir dit. La difficulté vient de ce que Bourbaki s'interdit d'affirmer que la relation soit un ensemble de flèches [34] parce que, dans ces conditions, l'entité mathématique « relation » se trouverait référée à l'entité métaphysique du même nom.

Et la difficulté consiste, au point de vue du présent paragraphe, en ce que le signe se trouve présenté de telle manière que le rôle en est altéré. La flèche n'est pas, dans la vue bour-

bakienne, la manifestation, dans l'ordre sensible, d'une entité mathématique déjà appréhendée dans l'ordre intelligible ; en principe, elle est déclarée comme constituant seulement l'évocation d'une donnée « triviale », donnée qu'il faut écarter si l'on veut s'exprimer et raisonner d'une manière proprement mathématique. Cette prise de position, ou ce parti-pris, n'est nullement requis, nous le répétons, par ce que *fait* Bourbaki.

Or, c'est cet a priori qui est à l'origine de la viciosité que nous relevons. Car le signe n'est, pour ainsi dire, au point de vue mathématique, que du « para intelligible », requis tout au plus au titre de condition, en vue d'exercer l'acte de compréhension proprement mathématique ; il n'est pas, et il ne peut pas être, présenté comme étant inventé en fonction même de l'acte de compréhension pour servir à celui-ci d'instrument. En sorte que, dans la mesure où il demeure en fait virtuellement englobé dans l'objet de cet acte auquel il est censé être hétérogène, le signe spécifie et capte pour ainsi dire dans l'ordre sensible auquel il appartient, l'acte qui cesse par le fait même d'être ce qu'il devrait être, à savoir proprement un acte de l'esprit. L'image du signe sensible n'étant plus subordonnée à l'exercice de l'acte intelligible, celui-ci risque de se trouver, quant à sa nature même, inverti.

Le rôle dévolu au signe dans la présentation bourbakienne.

Récapitulons les observations auxquelles nous a conduit, concernant le signe, la considération de l' « acte ».

L'acte de l'esprit requiert toujours la mise en œuvre du signe. Celui-ci intervient, notamment en mathématiques, de trois manières différentes.

Premièrement, le signe est médiateur entre deux actes, exercés l'un par celui qui enseigne l'autre par celui qui est enseigné. Le signe est alors, au point de vue de la communication, respectivement conséquent ou antécédent par rapport au contenu intelligible dont il parachève l'expression ; mais il doit être, ici et là, subordonné à l'acte de l'esprit dont il est la condition.

Deuxièmement, le signe se trouve intrinsèquement intégré dans l'acte qui est en propre celui de la découverte. Plus précisément, le signe, en tant qu'il est lui-même découvert, rend possible au sein d'un tel acte la « conversion » qui à la fois distingue et unit deux aspects du même jugement posé par

l'esprit : ce jugement étant négatif en tant qu'il écarte ce qui serait étranger à l'entité dont il va y avoir découverte, ce même jugement étant affirmatif en tant qu'il constitue la saisie de cette même entité une fois découverte.

On voit donc que, dans le second cas comme dans le premier, d'une part le signe exerce une sorte de médiation requise en fait par et dans la communication de la vérité, d'autre part cette médiation est intrinsèquement subordonnée à l'acte de l'esprit dont elle ne laisse pas d'être psychologiquement la condition.

Troisièmement, le signe intervient au cours de l'élaboration dont la découverte est normalement l'origine. Le signe est alors, en général, reforgé. Il doit en effet être réadapté aux exigences de l'idée dont il a rendu possible la découverte et au service de laquelle il doit devenir un instrument d'investigation et de communication. En sorte que, dans ce troisième cas comme dans les deux premiers, l'invention du signe est subordonnée à l'appréhension de l'idée tout comme la mise en œuvre en est normée par l'acte de l'intelligence auquel il est intégré.

Or cette ordination se trouve altérée dans la présentation bourbakienne.

Celle-ci, en effet, vise à donner, des notions primitives, celle de relation par exemple, une définition qui paraisse autosuffisante dans l'ordre purement formel ; mais elle réintroduit en fait, nous l'avons vu, un contenu intelligible non formalisé, au moyen du signe, en l'occurrence de la flèche. En sorte que le signe, ou bien est déclaré, officiellement pour ainsi dire, étranger à un formalisme vide, ou bien est en fait à l'origine d'une intelligibilité à laquelle il ne peut donc plus être subordonné. Implicitement, mais en réalité, l'acte se réfère au signe, non à l'idée.

L'acte qui constitue la manifestation propre de l'intelligence risque donc de se trouver voilé quant à sa nature et paralysé quant à l'exercice par la présentation moderne de la mathématique, tant par le rôle accordé nous venons de le voir au signe dans cette présentation, que par la substitution du résultat de l'acte à l'acte même de juger, ainsi que nous l'avons observé à propos de l'égalité (Cf. pp. 93 et sq.). Cet écueil est, il est vrai, surmonté instinctivement par les mieux doués, qu'ils soient enseignants ou enseignés. Il convenait cependant de le signaler, parce qu'il tient à l'essence même du bourbakisme ; et

parce qu'en conséquence, ne manqueront pas d'en pâtir la plupart de ceux à qui les méthodes nouvelles sont imposées, sans qu'ils puissent en discerner ni les limitations internes ni la véritable portée.

3. La position bourbakienne, concernant la nature des entités mathématiques, rend compte de ce qu'implique en fait cette même position concernant le rapport entre la mathématique et la métaphysique.

Concevoir l'ensemble des entités mathématiques comme une sorte d'univers « fermé », résorber l'opération mathématique dans l'ensemble des résultats qui lui sont associés, et aliéner ainsi l'acte de juger, sont, nous venons de le voir, en étroite connexion : le premier reconduit au second comme au principe prochain de son explication. Nous confirmerons la cohérence interne du bourbakisme en observant que ces « prémisses » rendent compte effectivement de certaines assertions qui de prime abord paraissent sans portée, alors qu'à la réflexion elles engagent une manière de concevoir le rapport qui existe entre la mathématique et la réalité. Nous allons examiner deux cas que nous considérons comme typiques ; le premier se réfère principalement à la manière de concevoir, en mathématique, les entités, l'autre principalement à l'acte de juger.

A. L'assimilation, fallacieuse, de l'égalité à l'identité, manifeste qu'en bourbakisme, l'entité mathématique est conçue d'une manière fermée.

Concevoir l'entité mathématique comme étant « fermée » induit à confondre l'égalité avec l'identité, c'est-à-dire à confondre l' « un » mathématique avec l' « un » métaphysique.

« Le but étant d'apprendre aux élèves à passer du sens usuel du mot égalité à son sens mathématique qui est l'identité, on évitera autant que possible le pluriel ' objets égaux ', puisqu'en fait il y a alors un seul objet » [69].

Le mot « égalité » doit-il, dans le domaine mathématique, signifier « identité » ? La réponse affirmative et catégorique donnée à cette question dans un exposé élémentaire, requiert d'être examinée.

Il est aberrant, aussi bien dans le domaine de la science mathématique que dans celui de la vie usuelle, de confondre l'un avec l'autre le sens du mot « égalité » et le sens du mot « identité ».

Considérons d'abord la mathématique elle-même. Force est d'observer que la distinction entre « égalité » et « identité » y a toujours été reconnue, et doit y être maintenue. Et cela parce que cette distinction est en fait présupposée par la mathématique telle qu'elle est concrètement. Si, par exemple, on veut établir que « Toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une équation algébrique est une fonction rationnelle des coefficients de cette équation », on montre que, pour l'expression considérée, l'invariance numérique qui constitue l'hypothèse entraîne l'invariance formelle qui implique immédiatement la conclusion. Or l'invariance formelle est à l'invariance numérique ce que l'identité est à l'égalité. Une égalité n'est pas toujours une identité. Mais, en l'occurrence, dans les conditions qui sont énoncées, l'égalité entraîne l'identité. C'est le passage de la première à la seconde qui constitue le medium de la démonstration. Or il ne pourrait y avoir ni passage, ni par conséquent démonstration, s'il n'y avait distinction. Comment dès lors affirmer que « le sens mathématique du mot égalité est l'identité » ? Faudrait-il donc conclure que la présentation moderne de la mathématique consiste, au moins en partie, à affirmer en principe le contraire de ce qu'on observe dans la mathématique « en acte » ? Nous préférons estimer que la présentation moderne peut être libérée de toute incohérence, mais il faut préciser quelles sont les conditions qui le rendent possible.

Examinons donc ce qui paraît faire difficulté, savoir le fait

(69) [9] ; classe de 6e, p. 21 ; classe de 5e, p. 9.

de se référer au « sens usuel du mot égalité ». Ce sens implique, quiconque l'admet, pluralité ; on ne dit pas qu'un objet soit égal à lui-même[80], mais que deux ou plusieurs objets sont égaux entre eux. Or cela suppose que chacun de ces objets est « un » objet et non pas « plusieurs ». C'est ce qu'on exprime par un dédoublement virtuel en affirmant, de chaque objet, qu'il est « identique » à lui-même : « identique », et pas seulement « égal ». L'*égalité* au sens usuel suppose donc l'*identité* au sens usuel, tout comme, en mathématique, l'*égalité* numérique se réfère à l'*identité* formelle. Cela s'appelle l'analogie et plus précisément « analogie de proportionalité ».

Il est donc aberrant, aussi bien au point de vue de la vie « usuelle » qu'à celui de la science mathématique, de viser à « apprendre aux élèves à passer du sens usuel du mot égalité à son sens mathématique qui est l'identité ». Attendu que les deux mots « égalité » et « identité » ont, employés dans le domaine usuel, deux « sens » différents ; et que les deux mêmes mots ont, employés dans le domaine mathématique deux « sens » différents. Le réformateur-pédagogue auteur des lignes citées, aurait-il pour but d'empêcher les élèves de comprendre quoique que ce soit à la mathématique réelle, parce qu'il faut avant tout leur apprendre que dans la mathématique moderne, les choses doivent se passer tout autrement que dans le domaine usuel ?

L'éviction de la distinction entre l'égalité et l'identité, montre qu'en bourbakisme l'entité mathématique est conçue de manière « fermée ».

Cela étant précisé, il est aisé de voir que si le bourbakisme refuse, dans le domaine mathématique, la distinction « égalité-identité », c'est parce qu'il conçoit les entités mathématiques, chacune et toutes ensemble, comme constituant un ordre à part, auto-suffisant et fermé, et non comme un ordre ouvert sur la réalité bien que distinctement spécifié.

L'errance ne se comprend qu'en fonction de la vérité. Rappelons donc comment se trouve fondée la distinction « égalité-

(80) On le dit d'une personne dont on observe le comportement en des instants différents. Or, l' « égal » se réfère alors à la pluralité des actes, laquelle se trouve manifestée en celle des instants, donc formellement à une pluralité.

identité ». L' « un » étant convertible avec l' « être », les modes de l' « un » suivent à ceux de l' « être ». Et notamment : l' « un », dans le mode « quantité », est l' « égalité » ; l' « un », dans le mode « qualité », est la « similitude » ; l' « un », dans le mode « relation », est la « réciprocité » ; l' « un », dans le mode « substance », est l' « identité ». La distinction « identité-égalité » est donc la manifestation, dans l'ordre de l' « un », de la distinction qui, primordialement, existe dans l'ordre de l' « être » entre la substance et la quantité. L' « égalité » est, dans la « quantité », ce que l' « identité » est dans la « substance », et par conséquent dans l' « être ». Et comme l'être est immanent à chacun de ses modes, l' « identité » qui, dans l'ordre de l' « un », correspond à l'être, est immanente à chacun des modes de l' « un », en particulier à l' « égalité » : l' « identité » est dans l' « égalité » et s'en distingue, de même que l' « être » est dans la « quantité » et s'en distingue.

On comprend ainsi pourquoi la distinction « identité-égalité » se retrouve dans la quantité, et par suite pourquoi on observe que cette distinction est effectivement mise en œuvre par la mathématique. Mais on voit également que cette distinction se trouverait privée de tout fondement si on ne reconnaissait pas la réalité de celle qui existe entre la substance et la quantité ; ou bien, ce qui en fait revient au même, si on attribuait à la quantité le rôle qui est celui de la substance.

Or, concevoir les entités mathématiques comme étant fermées, consiste à les poser comme étant indépendantes de toute autre réalité qui leur serait ontologiquement antécédente ; elles sont alors, en fait et quoiqu'on en veuille, des absolus autonomes. Or, c'est de cette manière qu'on définit la substance. Par suite, ces entités sont fonctionnellement « substance » ; c'est-à-dire que tout se passe au point de vue mathématique, comme si elles étaient des substances. Et comme ces mêmes entités ne laissent pas d'être « quantité », puisqu'elles sont l'objet propre de la mathématique, il s'ensuit que la distinction « substance-quantité » se trouve écartée : écartée « fonctionnellement », en ce sens que cette distinction ne peut jouer aucun rôle dans cette mathématique dont la systématisation bourbakienne constitue la norme épistémologique. Dans cette mathématique-là, il est donc *en droit* impossible de distinguer l' « égalité » de l' « identité » ; et comme, absolument, l' « identité » est dominante puisqu'elle ressortit à l' « être »,

c'est elle qui absorbe l' « égalité » : « le sens mathématique du mot égalité est l'identité ».

Concevoir, au contraire, les entités mathématiques comme étant ouvertes, c'est les référer à la quantité qui existe concrètement dans la réalité ; les définitions formelles des notions, irremplaçables au point de vue propre de la mathématique, ne sont pas alors considérées comme étant ontologiquement constituantes des entités. Et comme la quantité concrète ne subsiste elle-même que dans la substance, les entités mathématiques, supposées ouvertes, se réfèrent, dans leur ensemble, indissociablement à la substance et à la quantité. Dans ces conditions, la distinction « identité-égalité » est, pour la mathématique elle-même, radicalement parce qu'ontologiquement fondée ; cela résulte des considérations d'ordre métaphysique ci-dessus rappelées.

On voit donc que les principes abstraits, dont s'inspire effectivement quoique implicitement la systématisation bourbakienne, notamment le caractère fermé attribué à l'entité mathématique, entraînent par voie de conséquence des affirmations que la présentation moderne pose en fait sans d'ailleurs les justifier en droit, comme ayant valeur de principe, bien que ces pseudo-principes se trouvent démentis par le développement effectif de la mathématique.

Qu'en conclure ? Sinon ceci. Dans le cas Bourbaki, comme dans beaucoup d'autres, l'erreur ne s'infiltre qu'à la faveur d'une systématisation dont la seule justification est en définitive un choix a priori. Nous ne contestons pas la légitimité de tels choix, à la condition toutefois qu'ils se révèlent a posteriori conformes à l'expérience, par le développement de ses implications. Nous refusons donc, dans le bourbakisme, la systématisation qui s'accompagne d'une usurpation en quelque sorte métaphysique : l' « un » numérique remplace l' « un » ontologique, la quantité abstraite reconstruite par l'esprit est substituée à la quantité réelle et à l'être lui-même.

Nous reconnaissons que les apports de Bourbaki ont une valeur théorétique au point de vue propre de la mathématique. Mais pas n'est besoin, pour la leur conserver, de leur attribuer un rôle que, de par leur nature, ils ne peuvent assumer.

B. La définition de la « relation » manifeste à la fois l'existence et la viciosité des postulats qui sont sous-jacents à la systématisation bourbakienne.

Résorber l'acte de juger dans les entités qui en constituent le présupposé ou le résultat, induit à identifier la réalité intelligible qui est le véritable objet du jugement, avec le signe qui lui est associé.

Nous allons l'observer en considérant encore le cas de la relation : celle-ci joue, en mathématique, un rôle si « capital » qu'on ne saurait trop y insister. Nous nous placerons d'ailleurs, dans ce qui suit immédiatement, à un point de vue nouveau, en vue d'assumer la conclusion du paragraphe précédent. Résorber l'acte de juger dans les entités qui en constituent le présupposé ou le résultat entraine en effet de concevoir ces entités d'une manière fermée, et par conséquent de confondre, on l'a montré, l' « un » métaphysique avec l' « un » mathématique. La confusion entre la réalité intelligible objet du jugement et le signe qui lui est associé, en l'occurrence l'assimilation de la « relation » à la « flèche », peut donc être expliquée par sa cause radicale, à savoir, comme nous l'avons vu, l'altération de l'acte de juger. Cette même confusion peut également être référée à celle qui concerne les deux espèces de l'unité. C'est ce que nous allons maintenant indiquer.

La dégradation de la « relation » manifeste qu'en bourbakisme l' « unité mathématique » est confondue avec l' « un métaphysique ».

L' « un » métaphysique, étant convertible avec l'être, est absolu. Nous entendons par là que ce dont on affirme l'unité n'a, comme tel, à être référé à quoi que ce soit autre, non plus qu'à une division virtuelle qui manifesterait l'existence de parties existant seulement en puissance. L'être considéré en tant qu' « un », objectivement et quoi qu'il en soit du mode d'appréhension de cette unité, est ab-solu, posé en soi.

L'un mathématique est au contraire relationnel par essence, et cela de deux manières différentes. « Radicalement » d'abord,

puisqu'il est relatif à l' « un » métaphysique comme la quantité l'est à l'être. Et ensuite, « formellement », en ce sens que, dans la quantité soit continue soit discontinue, l'un et le multiple sont corrélatifs l'un de l'autre ; ils ne se définissent que mutuellement, par rapport l'un à l'autre : et cela non pas seulement en raison du mode de leur appréhension, mais également en eux-mêmes objectivement.

Toute entité, supposé qu'elle soit appréhendée, l'est comme étant « une ». Et, spontanément, l'esprit conçoit cet « un » conformément à la nature de l'entité qu'il appréhende. Cela est vrai, en particulier, de l'entité mathématique. Elle n'est appréhendée que comme étant « une », et elle ne peut être appréhendée conformément à sa nature véritable, que si le type de l' « un » qui lui est spontanément attribué est celui de la mathématique, type relationnel nous venons de le rappeler. Il en est ainsi pour une entité mathématique quelle qu'elle soit, mais cela est évidemment plus manifeste pour la relation : l' « un » qui se trouve attribué, nécessairement quoique implicitement, à une relation mathématique du fait qu'elle est appréhendée, doit être l' « un » de type relationnel et non l' « un » de type absolu.

On voit dès lors la conséquence de la confusion qu'implique, entre les deux modes de l'unité, la systématisation bourbakienne. Les entités mathématiques sont censées être appréhendées conformément au type absolu de l'unité. Par le fait même, elles se présentent, nous l'avons déjà observé, comme étant « fermées » ; de plus, elles sont conçues comme des absolus, comme des *choses* en soi. La relation elle-même ne peut échapper à cette norme, laquelle exclut toute acception, étant donné qu'elle se trouve inéluctablement impliquée par l'axiomatisme qui constitue l'inspiration même de la systématisation bourbakienne au point de vue épistémologique.

Or, si la relation ne peut être conçue que comme une « chose », force est de l'assimiler à ce qui simultanément, d'une part en est le plus proche et d'autre part se présente comme étant un objet « en soi ». La relation devient dès lors : soit le signe qui, en réalité, ne fait que la représenter, soit le couple des deux extrêmes qui, en réalité ne sont pas la relation elle-même, puisqu'ils jouent d'ailleurs, chacun respectivement, vis-à-vis d'elle, deux rôles différents. C'est bien ce qu'on observe en Bourbaki : la relation, c'est la « flèche », ou c'est le « couple » [61].

(61) Il est inutile, au point de vue qui commande ce paragraphe, de revenir sur les précisions qui ont été explicitées. Et notamment.

La dégradation de la « relation » manifeste, en bourbakisme, la mise à l'écart de l'acte de juger.

Cette dégradation de la relation peut d'ailleurs, rappelons-le, être expliquée « directement ».

La relation, au sens « trivial », n'est pas seulement un rapport établi par l'esprit. Elle est objectivement une réalité, laquelle est distincte de celle de ses extrêmes. Mais elle ne peut être saisie comme réalité propre, et donc conformément à son unité propre, que dans un acte par lequel l'intelligence à la fois considère les deux extrêmes à un même point de vue et en discerne les rôles respectifs, acte qui consiste donc à distinguer en affirmant l'unité, c'est-à-dire à juger. Or, si on admet, conformément à ce que nous croyons être la vérité, que la relation mathématique est objectivement fondée dans la relation « ordinaire », tout comme la quantité mathématique est objectivement fondée dans la quantité « ordinaire », il s'ensuit que la relation mathématique ne peut elle-même être saisie que dans un jugement. Altérer l'activité de jugement entraine donc de devoir substituer à la relation elle-même les éléments qu'elle intègre, et que, désintégrée, elle laisse à l'état de « choses » séparées.

La définition de la « relation » révèle en bourbakisme à la fois la rigueur et la précarité de la systématisation.

La définition proposée pour la relation constitue donc, en bourbakisme, une sorte de test. Le « modus significandi » adopté dans cette définition manifeste en effet « in actu » ce dont il est la conséquence nécessaire, savoir *soit* l'un *soit* l'autre des deux postulats fondamentaux dont fait état, sans les expliciter, la nouvelle systématisation proposée pour l'ensemble des mathématiques, c'est-à-dire : d'une part le caractère fermé des entités, d'autre part la mise à l'écart de l'acte de juger.

Ces deux postulats sont d'ailleurs, chacun respectivement

nous pouvons omettre la référence à l' « ensemble ». L' « ensemble de flèches » est un signe, comme « une » flèche l'est elle-même. L' « ensemble de couples » se distingue de la relation de la même manière que « un » couple.

nous l'avons vu, mis en évidence par des critères propres. Mais, en outre, ils sont connexes l'un de l'autre. Le jugement consistant en l'affirmation d'une identité dans l'être, si on n'en considère pas l'acte mais seulement l'expression, l' « être » n'affleure plus ; il n'est pas évincé parce qu'il ne peut pas l'être, mais il n'est plus « avoué ». Par le fait même, les entités entre lesquelles le jugement établit un rapport sont en fait considérées comme étant « fermées ». Et, en retour, si on conçoit les entités mathématiques comme étant auto-suffisantes, indépendamment de toute référence à la réalité, on doit écarter le jugement d'*existence* qui fonde ce rapport à la réalité. Dès lors, le jugement, bien qu'il ne puisse, non plus que l'être, être écarté absolument, se trouve réduit à un enchaînement formel privé de contenu intelligible [35].

On doit donc reconnaître la profonde cohérence du système bourbakien : cohérence formelle au point de vue de la mathématique, cohérence conceptuelle au point de vue de la métaphysique. Et par « conceptuel », nous entendons « ce qui concerne la manière de concevoir ». Ces deux cohérences découlent de la même inspiration, mais elles ne sont pas liées l'une à l'autre. La première constitue un précieux instrument au service de la vérité. La seconde serait également un bien, si la manière de concevoir dont elle est un attribut était elle-même conforme à la vérité ; nous ne pensons pas qu'il en soit ainsi, et nous croyons l'avoir établi. C'est pourquoi nous estimons que le précieux appoint du bourbakisme sera conservé, à la condition toutefois de rectifier le « modus concipiendi » mis en œuvre dans la systématisation bourbakienne, et d'en fonder la cohérence simultanément sur deux aspects, propres au domaine mathématique, de la même conformité : conformité de l'entité avec la réalité, conformité de l'acte de juger avec la vérité.

2 C. Récapitulation. Retour sur l'unité de la mathématique.

Nous pouvons récapituler cette seconde partie, consacrée à la remise en question de l'essence de la mathématique, en considérant de nouveau la nature de l'unité.

« L'un » est, au point de vue intelligible, la première manifestation de l'essence ; et il se retrouve, analogiquement, dans l'être et dans ses modes. Nous avons vu, dans la première section de cette deuxième partie, que, considérée à partir de la mathématique, l'unité de la mathématique doit être référée à l' « acte-idée » plutôt qu'aux concepts et au langage (pp. 41 sv.). Nous avons donc été amenés à cette conclusion en nous plaçant au point de vue particulier de la quantité ; nous allons voir qu'au point de vue plus général de l'être, elle ne laisse pas d'être également fondée.

1. La réalité et l'unité de la mathématique, d'après la « philosophia perennis ».

A. La réalité de la mathématique est fondée sur la quantité considérée comme un mode de l'être.

Qu'est-ce que la mathématique ? Selon Aristote, et selon la philosophie « classique », cette discipline se définit, comme

toute autre, par son « objet formel », c'est-à-dire par un certain point de vue dont l'esprit fait choix pour considérer la réalité, et corrélativement par tel aspect de la réalité que cette discipline se propose d'étudier. C'est la « quantité », détermination objective de l'être, qui spécifie la mathématique. La locution « ta mathematica », qui est au pluriel, désigne en général les entités mathématiques, c'est-à-dire les objets singuliers en lesquels se distribue concrètement l'objet propre de la mathématique qui est, formellement, la quantité.

Il faut donc, selon cette doctrine, distinguer trois sens différents pour le mot « mathématique ».

1. « Mathématique » désigne *le type de savoir* acquis et exercé par l'esprit lorsque celui-ci considère la réalité au point de vue de la « quantité ». La « quantité » est, en ce sens, la « ratio formalis sub qua » qui spécifie la mathématique « ex parte subjecti ».

2. « Mathématique » désigne *en général l'objet* de la mathématique entendue au premier sens. Cet objet, ou « objet formel quo », est la quantité, abstraite de la réalité ; cette quantité abstraite est dans l'esprit, sans laisser d'être référée à la réalité.

3. « Mathématiques » (ta mathematica) désigne les entités mathématiques singulières, en tant que celles-ci sont respectivement et immédiatement référées à la réalité dont elles sont abstraites ; par exemple tel nombre, référé implicitement à l'un des ensembles concrets dont il est le nombre

B. L'unité de la mathématique est fondée sur la spécification de l'acte par lequel l'esprit abstrait la « quantitas ut quantitas » de la « quantitas ut accidens ».

Cette manière de voir peut être conservée, à la condition toutefois d'entendre l'abstraction qui figure dans la définition du sens (2) d'une manière plus « active » que ne le faisait Aristote[62]. Quoi qu'il en soit, ce schéma définit la mathématique comme étant « une » ; et il assigne, de cette unité, un fondement qui, dans la même mesure que la définition proposée, est adéquat à la réalité.

(62) L' « être mathématique » comporte deux fondements, qui s'enchaînent organiquement. Premièrement, la quantité dont il est

La mathématique est « une », en vertu de l' « objet formel quo » (2), et corrélativement de la « ratio formalis sub qua » (1) ; bien que les « ta mathematica » soient multiples. Or cette corrélation entre (1) et (2), qui fonde l'unité de la mathématique, elle est une réalité concrète, seulement dans l'acte de l'esprit. Car, si la « ratio formalis sub qua » existe virtuellement dans l'esprit, et l' « objet formel quo » potentiellement dans la réalité, ces deux choses ne sont réelles que dans l'acte, et elles le sont alors uniment.

Selon la vue traditionnelle, le fondement véritable de l'unité considérée au concret est donc, pour la mathématique, l'acte de l'esprit, l'acte du mathématicien. Cet acte, multiple quant à l'exercice, ne laisse pas d'être toujours le même quant à la spécification, et pour autant d'être « un » en son exercice même. Et comme les caractères de l'acte appartiennent nécessairement à ce qui en procède immédiatement, la mathématique est « une » dans la diversité des « ta mathematica », comme l' « acte » est « un » dans la multiplicité de ses itérations. Ainsi, selon la vue traditionnelle, les deux fondements de l'unité, distingués l'un de l'autre formellement, et définis chacun respectivement, constituent ensemble le principe concret de l'unité réelle ; mais, cela, seulement en vertu de l'acte qui en réalise la corrélation. Le fondement prochain de l'unité est donc bien, pour la mathématique, l'acte de l'esprit, celui-ci étant considéré selon sa spécification.

2. Le développement organique de la conception classique. De l' « un » à « l'un » par le « multiple ».

Cet acte serait-il l' « acte-idée » ([13], 50), dont M. A. Revuz a, nous l'avons vu, heureusement souligné l'importance ?

abstrait, deuxièmement l'activité de l'esprit qui reconstruit cette quantité elle-même abstraite. Aristote, et les scolastiques, ont ignoré le second fondement, les modernes prétendent écarter le premier. La véritable difficulté tient à ce qu'il faut les coordonner, conformément à l'exigence de la vérité.

Identifier ces deux « actes » l'un à l'autre ne serait que concordisme obtus. Il est en retour instructif de discerner l'existence d'une concordance en quelque sorte spontanée entre l'acte intellectuel d'Aristote et le « geste intellectuel » de M. A. Revuz. Nous allons le préciser, non sans retrouver à un autre point de vue la tension entre le « traditionnel » et le « moderne » que nous avons maintes fois observée.

Suivons le cheminement, pour ainsi dire cyclique sinon génétique, que suggère le titre de cette étude « De *la* mathématique d'Aristote à *la* mathématique moderne, en passant par *les* mathématiques ». Voilà, « du point de vue de Sirius », les justes proportions que prend l'aventure. Voyons d'un peu plus près, car précisément on ne revient pas exactement au même point.

A. La genèse du Bourbaki n'a pas laissé de répondre à un vœu de l'esprit.

L'exigence de développement, inhérente à toute science, fit prévaloir les « ta mathematica » sur la « mathématique ».

Aristote jeta les fondements de l'épistémologie scientifique en se plaçant au point de vue de l'être. La rigueur métaphysique qui présida à cette entreprise avait, dans Euclide, Eudoxe, Calippe, qu'Aristote connaissait, un répondant de nature proprement mathématique ; mais cette rigueur dégénéra en formalisme verbal, lorsque des philosophes auxquels la mathématique était étrangère s'en emparèrent. Cela ne contribua pas à accréditer les principes d'Aristote, auprès des mathématiciens légitimement occupés à faire de la mathématique, plutôt que préoccupés de fonder leur science au point de vue de la métaphysique. Il convenait d'abord, au regard des mathématiciens, que la mathématique existât et par conséquent se développât ; cela, de soi, induit à considérer la mathématique dans les « ta mathematica ».

Qu'advint-il, au cours de ce développement, de l'unité ? L'unité ne constituait qu'une question « seconde », une ques-

tion de philosophe que la science elle-même ne retrouve qu'en réfléchissant sur sa propre démarche : signe de maturité, ou symptôme de sénilité ? On comprend donc qu'ait prévalu le troisième des sens ci-dessus définis, celui qui est lié au pluriel : « les mathématiques ». *Les* entités, *les* algorithmes, *les* théories, dont *les* créations respectives se succèdent, non sans cohérence, mais indépendamment de toute norme fixée a priori et en excluant par conséquent le cadre que constituerait une systématisation univoque ; voilà *les* « mathématiques vivantes ». Nul mathématicien n'en disconviendra ; et il est probable qu'avant une décennie l'ensemblisme, mode légitime mais injustement dictatoriale, sera rejetée comme un carcan gênant. *Les* mathématiques déborderont toujours *la* mathématique à la manière dont l'expérience, périodiquement, déborde les théories de la physique [63]. *Les* mathématiques, qui ont enfoui inconsidérément *la* mathématique d'Aristote, enfouiront a fortiori celle de Bourbaki.

L'exigence d'unité, immanente à l'esprit en acte de comprendre, se trouve satisfaite par la mathématique telle que l'a conçue Bourbaki.

On doit cependant reconnaître que le succès de Bourbaki, fût-il provisoire, n'est pas sans fondement.

L' « un » étant convertible avec l'être, l'acte de l'intelligence requiert l'unité de ce qu'il étreint. L'intelligence, pour comprendre, envisage son objet de telle manière que celui-ci soit un, ou bien instaure en son objet une unité qui en manifeste l'intelligibilité. Une science est donc mieux un savoir, et partant mieux elle-même, si elle est plus une ; la mathématique n'échappe pas à cette norme commune. Il s'ensuit que *les* mathématiques doivent être récapitulées dans *la* mathématique ; cela, en droit et éminemment, justifie Bourbaki, du seul fait que les mathématiques sont œuvre de l'esprit.

(63) Eddington pensa pouvoir décrire l'univers physique au moyen de deux sortes de particules élémentaires stables dont il avait déterminé approximativement les nombres respectifs. Or, depuis 1920, non seulement on a découvert l'existence d'une quarantaine de particules élémentaires, mais la notion même de particule stable est remise en question. L'expérience déborde toujours la systématisation ; et cela d'autant plus que celle-ci vise à une universalité dont l'univocité est la rançon.

Reste cependant à déterminer la nature de la récapitulation dont il s'agit. Or, nous avons vu que le patronage de Galois, **invoqué** par les meilleurs des Bourbakistes, désigne l' « acte-idée » comme étant, pour la mathématique moderne, le fondement de la créativité non moins que celui de l'unité : l' « acte-idée », et non, quoi qu'en dise Bourbaki épistémologue, le concept ou la manière de signifier. La « reconversion » *des* mathématiques, émancipées de *la* mathématique d'Aristote, en *la* mathématique moderne comporte donc deux interprétations et pour autant deux aspects différents, selon qu'on considère l'unité de la « mathématique moderne » comme étant la réalité qu'elle pourrait et devrait être, ou bien comme consistant en ce que la démarche réflexive de ses théoriciens prétend la faire être.

B. Bourbaki, tel qu'il est en fait, précise et approfondit l'épistémologie réaliste.

Examinons d'abord l'unité de la mathématique moderne en son authentique réalité, donc en tant qu'elle est fondée sur l' « acte-idée ». Nous entendons par là, du point de vue formel de la « mathématique moderne », que l'unité en est réellement fondée sur le discernement des structures [64].

L'unité de la mathématique moderne est, en réalité, fondée sur la similitude et l'analogie.

Le principe de l'unité, ce ne sont d'ailleurs pas les structures elles-mêmes. Mais celles-ci constituent pour ainsi dire la matière de celui-là ; et cela de deux manières différentes : soit que ces structures soutiennent entre elles un rapport d'analogie, soit que chacune d'elle se retrouve en des entités mathématiques différentes qui sont par le fait même semblables entre elles. *L'unité est dans la similitude et dans*

(64) Rappelons les passages déjà cités : « Ce qu'on appelle un peu vite la mathématique moderne, ce qu'il conviendrait mieux d'appeler la conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques. » — « Aujourd'hui les notions ensemblistes, les structures fondamentales de l'algèbre, les idées de base de la topologie irriguent toutes les mathématiques d'un sang neuf. » ([5], 5.)

l'analogie[65] ; elle est donc en vertu des structures, mais elle n'est pas dans les structures elles-mêmes. On peut donc dire équivalemment, que l'unité est réalisée dans un « acte-idée » : dans une *idée*, laquelle consiste précisément à rapprocher les unes des autres les entités qui ont même structure, c'est-à-dire à découvrir, entre ces entités, le « medium » de leur unité ; dans un *acte*, car seul un jugement permet de saisir, en l'affirmant, l'unité qui existe selon un aspect déterminé entre deux choses différentes : entre deux entités quant à la structure, entre deux structures quant à l'analogie.

Cette manière de concevoir l'unité de la mathématique moderne précise, loin de l'exclure, la détermination d'Aristote.

Premièrement, pas d'exclusion. Car, mettre en évidence le rôle de l'acte entraîne que l'on considère les entités mathématiques comme étant « ouvertes ». Leur unité possède dès lors le même caractère : c'est-à-dire que la réalité en est en droit fondée sur l'être, au même titre que celle des entités elles-mêmes.

Deuxièmement, précision : Les « ta mathematica » sont *un*, en ce sens que chacune de ces entités, concrète au point de vue du mathématicien, satisfait à *la* définition de *la* mathématique, cette définition étant fondée sur la quantité ainsi qu'il a été expliqué. Voilà la doctrine d'Aristote : les entités mathématiques sont « un » parce qu'elles ont toutes le même fondement au point de vue métaphysique, et parce qu'elles en procèdent de la même manière au point de vue épistémologique. Voici maintenant la précision qu'apporte la mathématique moderne. Cette *même* unité, définie comme il vient d'être dit, et ainsi *fondée* objectivement *dans* la réalité, peut — et même *doit* — également être caractérisée au point de vue propre de la mathématique ; à ce point de vue, elle *consiste en* la similitude et en l'analogie qui ont formellement pour contenu les « structures » des entités mathématiques. Ainsi, l'unité de *la* mathématique, d'une part est « *fondée dans* », d'autre part « *consiste en* » ; l'un précise l'autre, et même le requiert : cela est possible, parce que l'unité est envisagée à deux points de vue différents.

L'unité d'ailleurs « suit » l'être ; l'unité entre les entités « suit » les entités elles-mêmes. Tout de même que l'entité

(65) Voir page 123.

mathématique est *fondée dans* la quantité au point de vue métaphysique, et *consiste en* sa définition formelle au point de vue mathématique, ainsi en est-il de l'unité. En ce sens, l'unité est une notion « ouverte », comme l'entité l'est elle-même, et en même temps qu'elle.

On voit donc que si l'unité de la « mathématique moderne » est considérée en son authentique réalité, c'est-à-dire en tant qu'elle procède de l' « acte-idée », elle s'insère organiquement dans l'unité de la mathématique en tant que celle-ci est fondée sur la quantité. Il n'y a pas deux « unités » de la mathématique, pas plus qu'il n'y a dualité pour l'être mathématique. On le comprend par l'analogie. En ce qui n'est pas « par soi », l'être propre, que mesure la nature, est à la fois distinct et indissociable du subsister qui est dans la réalité ; et, corrélativement, sont pareillement distincts et indissociables : d'une part le principe radical de l'unité, d'autre part le constitutif formel de la même unité. L' « un » de la mathématique conçue selon Aristote s'achève dans l' « un » de la mathématique conçue selon les modernes, par la médiation du multiple qu'implique le développement de la mathématique.

Aussi le développement *des* mathématiques peut-il avoir pour conséquence de parachever l'unité de *la* mathématique : l'unité qui procède de l' « acte-idée » explicitant celle qui est fondée sur la quantité. Dans cette vue, la « mathématique moderne » doit être en vérité considérée comme un achèvement, parce qu'elle n'introduit, au point de vue propre de l'unité, aucune solution de continuité. Et, en ce sens, nous disons que le succès de Bourbaki n'est pas sans fondement ; il s'intègre dans le développement de *la* mathématique : il demeurera, même quand la mode de l' « ensemblisme » passera.

C. Le bourbakisme, tel qu'il se voudrait être, réduit la mathématique à un jeu ésotérique.

Nous devons examiner, en second lieu l'unité de la « mathématique moderne », telle que la caractérisent les auteurs plus attentifs en fait à la systématisation qu'à l'intelligibilité.

Non certes que ces savants mathématiciens méconnaissent leur propre science ; mais, pour en assigner l'unité, ils la

considèrent a posteriori et réflexivement, plutôt que dans son jaillissement. L'unité de la mathématique reposerait, pensent-ils, sur l'identité des concepts et de la manière de s'exprimer, non sur l' « acte-idée ». Nous croyons que cette manière de concevoir imposerait à la mathématique un formalisme qui la conduirait à une impasse si elle ne le brisait, et qu'elle a pour effet de couper d'avec la réalité les entités et les théories mathématiques enfermées dans ce même formalisme. Il serait sans intérêt de reproduire les observations que nous avons faites à plusieurs reprises ; elles valent évidemment pour l' « unité » comme pour les « entités » : nous venons de l'expliquer au paragraphe précédent consacré à la conception réaliste de celles-ci et de celle-là, il est inutile de le reprendre en considérant la conception formaliste qui nous occupe maintenant.

Il sera plus instructif de discerner quelle peut être l'origine, sinon la cause, de la différence, et en fait de la confusion, entre ces deux conceptions, l'une réaliste, l'autre formaliste, des entités et de l'unité. Le document qui sert de base pour la réforme de l'enseignement mathématique se place à un point de vue pragmatique. Cette option, légitime si on considère la réforme elle-même, a rejailli sur la manière de caractériser la mathématique en tant que « moderne ». Se trouvent en effet mises à parité, du seul fait qu'elles interviennent conjointement dans les recherches contemporaines, des notions qui sont cependant bien différentes les unes des autres, tant par leur nature que par leurs implications [65]. Examinons brièvement un cas aussi typique qu'important.

Les deux notions d' « ensemble » et de « structure » ne peuvent être assimilées. Et cela, en particulier, au point de vue de l'unité.

L' « ensemble », étant caractérisé comme ce à quoi l'appartenance d'un élément peut être décidée *soit* par « oui » *soit* par « non » [66], est une notion *univoque*. La « structure », au contraire, induit, nous l'avons observé, à découvrir la *similitude* et l'*analogie*. Or, si l'univocité rend possibles a posteriori des classifications qui ne laissent pas d'être utiles, elle est de soi stérile; au mieux, elle engendre la répétition, laquelle est seulement de l'ordre dégradé. Tandis que la similitude et l'analogie sont fécondes, l'expérience le prouve et en particulier l'expérience Bourbaki [67]. La raison en est double. Radicalement, la similitude

65) M. Louis Couffignal ([15]) a examiné la « mathématique

et l'analogie sont précisément les structures qui conviennent à l'être comme tel, en sorte qu'elles en approprient la communicabilité à chacun des modes dans lesquels elles se retrouvent. Formellement, elles peuvent intégrer une structure d'ordre : l'unité d'un ordre consistant en ce que les éléments qui le constituent, soutiennent des relations *semblables ou analogues entre elles* avec le principe de cet ordre.

Ajoutons que la notion de structure se réalise dans l'entité « ensemble », et que les ensembles n'ont d'intérêt que par la différenciation de leur structure. L'inverse n'est pas vrai. Si en effet on considère plusieurs structures, deux cas sont possibles. Ou bien elles sont incompatibles entre elles, en sorte que leur « ensemble » n'a d'existence que verbale. Ou bien elles s'intègrent dans une « superstructure », disons dans une « catégorie », dont elles deviennent, chacune respectivement, un élément qualitativement différencié. Mais alors, c'est cette « catégorie » qui joue le rôle de *structure* pour l'*ensemble* des structures primitivement considérées ; c'est donc bien la notion de structure qui se réalise dans l'entité « ensemble », et non l'inverse.

On voit donc que si l' « ensemble » et la « structure » figurent également parmi les notions privilégiées de la « mathématique moderne », ils ont respectivement, en droit comme en fait, des portées bien différentes. La structure, riche de similitude et d'analogie, répond à l' « acte-idée ». L' « ensemble » est une entité à laquelle correspond seulement un concept, à moins précisément qu'elle ne soit structurée. Il s'ensuit qu'il y a un « ensemblisme », tandis qu'il n'y a pas, si l'on ose dire, de « structuralisme ». Et nous appelons « ensemblisme » le fait d'introduire la notion d'ensemble dans les définitions des notions primitives, en sorte que l' « ensemble » est supposé être la plus primitive de toutes. « Au commencement est l'ensemble. » Tel est *le* postulat bourbakien, et en même temps l'hypothèque dont est grevée la systématisation bourbakienne. Nous avons déjà observé l'un et l'autre ; les définitions ensemblistes sont

moderne » en se plaçant à un point de vue différent du nôtre. Il considère les mathématiques comme un instrument au service de la physique. Nous avons cherché à discerner quel est, pour la mathématique, le fondement métaphysique. Or nos conclusions sont identiques à celles de M. Couffignal, notamment en ce qui concerne l'apport positif contenu dans la « mathématique moderne », et le rôle parasite qu'a joué le formalisme. Cette convergence nous paraît être un signe de vérité.

défectueuses, même au point de vue logique, parce qu'elles visent à ramener des notions qui sont primitives à la notion d' « ensemble » : or cela est impossible, et se présente d'ailleurs comme étant innaturel.

Fonder l'unité de la mathématique sur l'univocisation, construite a posteriori, de concepts différents par nature, réduit la mathématique elle-même à n'être qu'un jeu de l'esprit.

La même défectuosité affecte au point de vue épistémologique, l'unité prétendument fondée sur le fait factice que les mêmes concepts et le même langage sont utilisés dans toutes les branches de la mathématique [25]. C'est là une unité factice, puisqu'elle repose sur des données qui, en réalité, la présupposent. Reconstruite par l'esprit d'une manière artificielle, cette unité ne peut d'ailleurs résister à la découverte d'entités nouvelles ; et, liée à la prévalence accordée à l' « ensemble », elle est vouée à passer en même temps que la mode ensembliste.

Est-il besoin d'ajouter que cette sorte d'unité étant posée comme auto-suffisante, elle est par le fait même incompatible avec toute autre manière de concevoir l'unité ; force est donc de lui attribuer le caractère « fermé », lequel est, de soi, non cohérent avec la véritable universalité. Dans cette vue, le développement *des* mathématiques aurait conduit de *la* mathématique, fondée en sa réalité et en son unité sur la quantité, à *la* mathématique ésotérique dont l'unité tient au jeu de la raison [17] et non pas même à l'intelligibilité. Où serait le bénéfice ?

3. « A bas l'ensemblisme ! » — Et, alors : « Vive Bourbaki ! ».

Concluons en rappelant quel est l'ordre véritable. Lui seul constitue la trame solide sur laquelle « Bourbaki » peut se dessiner comme de l'authentique beauté.

« Au commencement est l'être » : cela, absolument. S'il

s'agit de connaissance, il faut ajouter : « Au commencement est l'esprit ». Ces deux co-principes sont l'un et l'autre requis, aussi bien pour la mathématique que pour son unité. D'une manière précise : « Au commencement est la quantité ». « Au commencement est l'acte-idée ». Et l'on peut ajouter : « Au commencement est le signe » ; en ce sens que le signe est matériellement dans la « quantité », et qu'il est l'expression de l' « acte-idée ».

Bourbaki erre dès le commencement en posant : « Au commencement est l'ensemble ». Bourbaki, cependant, se ressaisit ; car il vaut beaucoup mieux par ce qu'il fait que par ce qu'il dit. Et ce qu'il fait, étant « réalité » et étant « acte » au point de vue mathématique, s'avère, comme il est normal, conforme aux véritables principes de la mathématique : non pas l' « ensemble », mais bien la « quantité » et l' « acte-idée ». Nous ne ferons donc que défendre Bourbaki contre Bourbaki, en reprenant et en transposant le célèbre slogan : « A bas Euclide ! » ([1], 2). Nous disons donc : « A bas l'ensemblisme ! Et, alors, vive Bourbaki ! » [66] De *la* mathématique primordiale à l'ordre de *la* mathématique, par la permanente recréation *des* mathématiques.

(66) Nous ne disons pas : « A bas l'ensemble ! » La notion d'ensemble a « droit de cité » en mathématique, au même titre que beaucoup d'autres. Ce qui est inacceptable, tant au point de vue de la logique formelle qu'à celui de la « mathématique vivante », c'est la dictature « ensembliste ». Elle constitue l'une des formes de cette dictature actuellement trop répandue qui consiste à attribuer au « collectif » comme tel une valeur absolue. « Créer, c'est unir ». Telle est la plus hallucinante des trouvailles dues à un « prophète » contemporain. L' « ensemble », étant union, est par là-même « création ». Il est par le fait-même absolu. La mode ensembliste est en affinité avec le teilhardisme. Il est fort commun qu'une même tendance se retrouve, à une même époque, dans toutes les branches de l'activité intellectuelle ; quoi qu'il en soit d'ailleurs d'un ordre génétique qu'il est fort difficile sinon impossible de déterminer.

3. La remise en question de la pédagogie mise en œuvre dans l'enseignement des mathématiques.

Nous examinerons cette remise en question, d'abord au point de vue du contenu de l'enseignement, ensuite au point de vue de ceux à qui l'enseignement est proposé. Nous terminerons en indiquant les importantes questions que nous parait impliquer la nouvelle présentation.

Nous nous plaçons, dans cette troisième partie comme dans les deux premières, au point de vue des réformateurs « savants ». Nous visons donc à dégager les principes qui peuvent aider le lecteur à juger par lui-même, en tenant compte évidemment d'une expérience qui peut être fort diverse.

1. La remise en question de la pédagogie, au point de vue du contenu de l'enseignement.

« Répéter » constitue un aspect important de la pédagogie ; cela, non seulement à l'intérieur d'un groupe restreint, mais

actuellement aux dimensions de l'humanité tout entière. Et comme « répéter » exclut la nouveauté, « faire passer » dans l'enseignement les découvertes récentes a toujours présenté quelque difficulté [67]. On peut le déplorer, on peut faire le procès de la routine... ; il ne faudrait pas méconnaître qu'il y a une cause *objective* à cette difficulté, savoir l'inertie dont se trouve affectée, au sein de l'humanité [68], la communication de la vérité. Les mathématiques dites « modernes » apportent, de ce fait, une nouvelle confirmation ; car enfin, ces définitions du nombre et de la multiplication présentées comme « modernes », elles remontent à Cantor et à Russel, c'est-à-dire à plus d'un demi-siècle. Laissons de côté cet aspect de la question, non sans observer qu'à cet égard Bourbaki est parfaitement conforme à la « tradition ».

La réforme de la pédagogie au point de vue du contenu de l'enseignement, si elle modifie quelque peu la matière enseignée, consiste surtout en un « esprit » ; et elle concerne principalement l'ordre d'exposition, par voie de conséquence l'épistémologie. Les réformateurs ont visé à stimuler la créativité. Tel est l' « esprit ». A cette fin, ils ont présenté la démarche mathématique comme étant ordonnée à la résolution des « situations familières » qui sont censées en être le point de départ. En sorte que la connexion entre l'épistémologie et l'ordre d'exposition apparaît deux fois, savoir à l'origine et puis au terme de cette induction : à l'origine, dans les axiomes de la mathématique, au terme dans sa justification. Examiner chacun de ces trois aspects respectivement, conduit à déceler la même non cohérence dans la réforme de l'enseignement.

A. La réforme de l'enseignement vise à favoriser l'activité de recherche. Aussi est-ce inconsidérément qu'elle sous-estime la communication du « déjà connu ».

En quoi consiste l'esprit de la « réforme » ?

Selon M. A. Revuz, l'enseignement moderne doit mettre en évidence l'*idée* ([2], 85 a) ; il doit inciter l'étudiant à redécou-

(67) Les moyens audio-visuels, utilisés à grande échelle, ne changent pas ces conditions. Ce qu'ils réussissent à communiquer si rapidement ce n'est pas la connaissance de la réalité elle-même mais bien la connaissance de l'efficacité dont la science peut être l'origine.

(68) L'inertie qui affecte et « alourdit » la communication d'une

vrir, plutôt que transmettre une formule bien précise, laquelle n'a été en fait élaborée qu'en dernier lieu ([2], 85 b). Corrélativement : « Le reproche essentiel que l'on peut faire à l'enseignement 'traditionnel' est de réduire toute la mathématique à la simple déduction... Le 'Montrer que...' de la quasi totalité des énoncés montrait surtout qu'il ne s'agissait que de retrouver du connu, du catalogué, que l'on ne mettrait jamais l'élève dans la situation véritable où les problèmes se posent, c'est-à-dire sans que l'on sache quelle est la solution, sans qu'on sache même s'il y a une solution » ([13], 58). Ces observations et ces vœux nous paraissent profondément justifiés, dans la mesure toutefois où ils sont compatibles avec la réalité. Nous observons en effet que seul l'acte est communicable, et qu'il l'est en vertu de son *objet*. D'où le rôle, *irremplaçable* au point de vue pédagogique, de la « formule bien précise », quoi qu'il en soit des autres aspects de son utilité. D'où, également, d'importantes conséquences concernant la « recherche » au point de vue pratique de la pédagogie.

Induire l'élève à chercher ne peut se réaliser qu'à partir d'une connaissance actuée, c'est-à-dire dans l' « acquis » ou à partir de lui.

L'acte étant seul communicable, et l'étant seulement en vertu de son objet, on peut amener l'élève à se trouver dans une situation mentale qui l'induise à chercher, on peut lui expliquer comment se pose telle question encore non résolue ; mais il est impossible de lui communiquer directement l'acte de chercher. Il est impossible que le maître, en acte de recherche, communique directement cet acte qui est sien à l'élève dont l'esprit serait *actué* par ce « chercher » ; car celui-ci, n'ayant pas positivement de contenu, est une potentialité au sein d'un acte, mais formellement *n'est pas un acte* ; or seul l'acte peut actuer.

Communiquer l'acte de chercher ne peut se faire qu'indirec-

découverte tient à la structure même de l'acte de découvrir. Celui-ci porte simultanément sur l'idée, et sur les instruments qui sont en fait nécessaires pour l'exprimer. Or la pédagogie doit remonter pour ainsi dire le cours de cet ordre ; elle doit suggérer l'idée en apprenant le maniement des instruments. Ce maniement correspond en général à un « climat mental » qu'on ne peut improviser, et qui doit être lentement formé pour que la découverte puisse réellement « passer ».

tement, en mettant en évidence, *dans l'acquis ou à partir de lui*, certaines connexions ou certaines lacunes. Mais cela suppose qu'un acquis soit commun à celui qui est en acte de chercher et à celui à qui cet acte peut être communiqué. Cela exigerait donc, s'il s'agit du maître et de l'élève, que l'élève sût déjà ce que sait le maître, c'est-à-dire ce que justement il a à apprendre... puisqu'il est élève. Ou bien, si l'on admettait que l'élève n'eût rien à apprendre, il s'agirait vraiment de l'enseignement au royaume Utopie. Nous ne voyons donc pas quelle portée réelle peut avoir la seconde des critiques de M. Revuz : « On ne mettrait jamais l'élève dans la situation véritable où les problèmes se posent, c'est-à-dire sans que l'on sache quelle est la solution, sans qu'on sache même s'il y a une solution ». On ne l'a jamais fait, et on n'a jamais tenté de le faire, parce que c'est impossible. Et d'ailleurs, sur ce point également, les exposés de mathématique moderne sont en parfaite conformité avec la tradition. Ils comportent en effet des « exercices »... dont les « corrigés » indiquent, bien entendu, « *ce qu'il faut montrer* ». Et ces corrigés forment un recueil à part, à l'usage du « maître » ! Nous ne le critiquons pas ; mais nous observons encore une fois que Bourbaki est en accord avec la réalité, *et avec toute la tradition*, par ce qu'il fait, bien qu'il le condamne en vertu des principes qu'il dénonce dans l'abstrait.

Induire l'élève à chercher requiert en fait que l'élève puisse être guidé, et par conséquent qu'il débouche sur de l' « acquis ».

Il faut stimuler le goût de la recherche, et en développer l'aptitude, même chez les plus jeunes ; on ne peut qu'en être d'accord avec M. Revuz. Mais on n'y peut réussir qu'à deux conditions.

Premièrement, il faut que la recherche proposée *aboutisse*, au moins en général ; sinon, en des esprits non formés, elle engendre le scepticisme au lieu d'éveiller la curiosité : on ne le constate que trop.

Deuxièmement, et en conséquence, l'élève qui est en acte de recherche à propos d'une question, dont il présume il est vrai qu'il y a une résolution, doit être guidé ; autrement, dans la plupart des cas, la recherche risquerait précisément de ne pas aboutir. Or l'une et l'autre condition exige que la recherche porte sur du « déjà connu ». Quelle pourrait bien être l'issue, même dans l'enseignement du second degré ([13], 76), dans

une classe de première par exemple, d'une leçon consacrée à la « résolution » du problème des quatre couleurs !...

Nous croyons donc pouvoir conclure que l' « esprit de la réforme » produira de bons fruits, si les maîtres qu'il inspire sont réalistes et avertis. Mais, en retour, l'abandon inconsidéré de la mémorisation, la prétérition des « formules bien précises », qui seules éduquent le sens de la précision, la réduction excessive du temps consacré à l'enseignement magistral, la contagion endémique d'un questionnement aveugle, le snobisme portant vers le nouveau et l'ostracisme porté contre le « déjà connu », sont autant de périls menaçants qui peuvent se couvrir de l' « esprit de la réforme » tout en le trahissant.

B. Le nouvel ordre d'exposition implique, en partant de « situations familières », que les axiomes de la mathématique soient conçus comme étant « ouverts ». Cela est en contradiction, au point de vue épistémologique, avec la conception bourbakienne de la mathématique.

Il convient de partir de « situations familières ».

« Le professeur du second degré (et pas seulement lui, sans doute) ne doit pas se contenter d'être un professeur de mathématiques, mais plutôt chercher à être un professeur de mathématisation. Reprocher aux mathématiques d'être abstraites est une sottise : elles le sont par nature ; mais reprocher à un enseignement des mathématiques de ne pas montrer nettement d'où et comment les mathématiques ont été abstraites, est légitime » ([13], 67-68). Et, ayant justement observé « que ce qu'une génération qualifie d'abstrait est souvent considéré comme concret par la génération suivante » ([13], 68), M. A. Revuz estime que « Du point de vue pédagogique, il serait plus honnête de dire 'partons du familier' que de dire 'partons du concret' » ([13], 69). Aussi décrit-il ce qu'il appelle « Mathématisation de situations familières » : « L'étude de la situation consiste à la préciser, à y mettre de l'ordre et à chercher les lignes suivant lesquelles s'y exercent l'action et la réflexion. L'expérience d'un enfant très jeune est suffisante pour fournir un grand nombre

de situations d'où les notions de base — ensembles et relations — peuvent être dégagées. » ([13], 69-70).

Ces excellents principes sont effectivement appliqués, notamment dans les manuels destinés à l'enseignement du premier degré, et même dans les meilleurs ouvrages d'initiation ([14]). Le seront-ils, pourront-ils l'être, par des maitres trop hâtivement formés ? Nous n'examinons pas cet aspect de la question. Les réformateurs ont, selon nous, raison, de ne pas se laisser arrêter par des difficultés qui ne tiennent pas à la nature même de la réforme.

Partir de « situations familières » implique que la mathématique ait un statut inductif, et que les axiomes soient conçus comme étant « ouverts ».

Choisir une manière de présenter la mathématique implique, pour cette présentation, le choix d'une méthode appropriée.

La mathématique proprement dite étant introduite à la faveur d'une « situation », elle constitue un « moment », et plus précisément le « *medium* » d'une induction. C'est-à-dire qu'il faut se reporter à cette « situation » dont l'analyse a servi de point de départ, et confronter avec elle le *modèle mathématique* qui a été élaboré à partir d'elle. Se retrouvent dès lors les propriétés du raisonnement inductif, notamment le fait que, du réajustement alterné entre la « base » et le « medium », résulte, pour l'un et pour l'autre, un approfondissement de l'intelligibilité. M. A Revuz l'explique en des pages ([13], 70-73) que nous regrettons de ne pouvoir citer, et auxquelles nous conseillons le lecteur de se reporter.

Bornons-nous à ce qui concerne la mathématique elle-même. « L'étude mathématique du modèle conduira à une théorie déductive. Celle-ci sera fondée sur ses propositions de base — ses axiomes — qui sont l'expression mathématique de la structure du modèle... Il faut redire qu'exposer une théorie déductive sans énoncer clairement et présenter explicitement comme telles, les propriétés de départ de la théorie — c'est-à-dire ses axiomes — ne peut relever que de la confusion d'esprit ou de la malhonnêteté. Il faut redire aussi qu'énoncer des axiomes, sans indiquer quelle est leur origine (dans la situation réelle, ou

mathématique, que la théorie a pour but d'étudier) est une autre forme de malhonnêteté, et réduit la mathématique à n'être qu'un pur jeu de l'esprit » ([13], 74).

On ne saurait mieux dire : non seulement au point de vue de la pédagogie qu'adopte en ce passage M. A Revuz, mais absolument. On doit situer les axiomes d'une théorie déductive, d'une part en regard de la théorie elle-même en les énonçant clairement, d'autre part en regard de la « réalité » en précisant quel en est le fondement. La difficulté sur laquelle nous croyons devoir, encore une fois et particulièrement au point de vue de la pédagogie, attirer l'attention, tient à la manière de concevoir le rapport qui existe entre ces deux « références » de l'axiome, l'une à la théorie dont il est l'origine, l'autre à la réalité en laquelle il est fondé.

Nous retrouvons l' « ouvert » et le « fermé ». En l'occurrence, le rapport entre les deux « références » est conçu comme étant « ouvert », si ces deux « références » sont définies comme étant en continuité l'une avec l'autre ; et il est conçu comme étant « fermé », si ces deux « références » sont définies comme étant disjointes l'une de l'autre : la définition de l'axiome en tant que celui-ci est au principe de la théorie étant alors considérée comme auto-suffisante, et donc comme excluant au même point de vue toute autre définition.

Or, paradoxalement, l'axiome est conçu, en bourbakisme, comme étant fermé.

Que les exposés « modernes » adoptent la conception « fermée », cela résulte, implicitement nous l'avons vu, d'une part de la teneur des définitions, d'autre part de la séparation, soit suggérée entre l'axiomatisation et l'intuition ([14], IX), soit introduite entre les deux « références » de l'axiome, l'une appartenant seule au domaine mathématique, l'autre en étant exclue.

Ajoutons que ce choix de la conception fermée, pour implicite qu'il soit, est rendu perceptible par des conséquences qui ont été effectivement observées. On a prétendu caractériser la mathématique moderne, en l'opposant à la mathématique traditionnelle, notamment au point de vue suivant. « Avant », on procédait du particulier au général, « maintenant » on fait l'inverse, c'est-à-dire qu'on part du général pour aboutir au

particulier[69]. Affirmation certes quelque peu sommaire, mais qu'excuse suffisamment le « genre littéraire ». Elle n'eût cependant pas été formulée, si elle n'exprimait un aspect de la vérité. Et, en effet, elle s'explique aisément par le fait que les deux références de l'axiome, l'une à la théorie l'autre à la réalité, peuvent être conçues comme étant soit en continuité soit séparées. La mathématique traditionnelle adopte le premier point de vue. Elle a donc pour point de départ le fondement des axiomes dans la réalité, c'est-à-dire « originellement »[70] les données sensorielles et par conséquent le « singulier », le particulier ; en sorte qu'elle procède du particulier au général. La mathématique moderne adopte le second point de vue ; c'est-à-dire que, dans cette mathématique, la référence de l'axiome à la théorie dont il est l'origine est conçue comme étant séparée de la référence du même axiome à la réalité qui en est le fondement. L'axiome est donc, *absolument*, le point de départ, en deçà duquel il n'y a rien au point de vue mathématique. Et comme il est exprimé en termes généraux, la mathématique moderne se présente comme procédant du général au particulier.

Cette mathématique n'est-elle pas d'ailleurs souvent, pour la même raison, considérée comme étant un « pur jeu de l'esprit » séparé de la réalité ? Tel est précisément l'un des écueils dont M. A. Revuz discerne fort justement la cause : les axiomes sont définis comme étant des notions fermées. Le grand dommage nous paraît être que M. A. Revuz ne formule ses observations qu'en se plaçant strictement au point de vue pédagogique ; et que les réformateurs savants soient eux-mêmes les protagonistes de cette errance, c'est-à-dire qu'ils définissent en fait les axiomes comme étant des notions fermées, lorsqu'ils rédigent les traités-pilotes de la nouvelle mathématique.

(69) Article d'information générale, paru dans « Le Figaro », 24 novembre 1966. Cette affirmation figure d'ailleurs dans le Bourbaki savant (fasc. I, p. V).

(70) « Originellement », et non « formellement ». Nous ne pouvons analyser cette question.

C. Le nouvel ordre d'exposition, résolvant la « mathématique » dans la « logique » ou dans le « signe », et justifiant la « mathématique » par l' « utile », implique, entre l'idéalisme et le pragmatisme, un compromis dont la non-cohérence se manifeste par la mutuelle contamination des disciplines en présence.

Le nouvel ordre d'exposition manifeste le dualisme épistémologique que les réformateurs déclarent être sous-jacent à la nouvelle mathématique.

« En droit, l'esprit est libre de procéder à son gré au choix des axiomes, sous la seule restriction de leur non-contradiction : problème redoutable d'ailleurs, qui n'a pas, lui non plus, de solution absolue. » ([13], 30). Ce « problème redoutable » a passionné, et puis lassé l'attention des logisticiens pendant un demi-siècle. On comprend que, en ce qui concerne ce problème, M. A. Revuz se rallie à la résolution pragmatique. Après quoi il poursuit : « Mais en fait, cette liberté est limitée par l'utilité de la théorie : utilité à l'égard d'autres Sciences, ou utilité à l'égard des Mathématiques existantes, pour coordonner des résultats épars » ([13], 30).

Ces quelques lignes expriment, nous parait-il, avec autant de lucidité que d'exactitude, la position épistémologique de la « mathématique moderne », *telle que celle-ci est conçue réflexivement* [71] par ses partisans les plus autorisés, et telle qu'elle est en fait enseignée. Cette position épistémologique consiste à juxtaposer plutôt qu'à amalgamer l'idéalisme et le pragmatisme, celui-ci étant référé au réalisme sensible, celui-là au cons-

(71) Nous disons « réflexivement », car nous ne pensons pas que M. A. Revuz décrive le comportement *spontané* du mathématicien *en acte*, que celui-ci souscrive ou non a posteriori au système bourbakien. L'antécédent immédiat de la véritable découverte, c'est le « choix négatif ». Intuitif et non réflexif. Choisir les axiomes en fonction de l'utile, c'est introduire dans la mathématique une sorte de finalisme qui lui est étranger. On peut, de cette manière, construire des cadres utiles, mais on risque de manquer la réalité elle-même, et en particulier la réalité mathématique qui n'est pas une pure construction de l'esprit.

tructionnisme logique. C'est la théorie que le « Cercle de Vienne » dut pousser à l'extrême, et jusqu'au paradoxe, parce qu'il se plaçait au point de vue métaphysique. La mathématique comme telle n'a pas à le faire ; mais le dualisme que présente la « mathématique moderne » au point de vue épistémologique vient de ce que, tout comme le « Cercle de Vienne », elle écarte la norme que constitue le réalisme.

Le dualisme qui est observable, dans la nouvelle mathématique, au point de vue épistémologique, résulte inéluctablement de l'abandon du réalisme.

Le réalisme consiste en effet à affirmer que tout acte de connaissance se termine ultimement, non au verbe mental qui à la fois représente l'objet et le rend présent à l'esprit, mais à la réalité elle-même ; celle-ci étant d'ailleurs considérée et saisie conformément au point de vue que le type de cette connaissance spécifie. Selon cette doctrine, est dite mathématique la connaissance dont l'acte se termine à la quantité telle qu'elle est dans la réalité. Et comme, par définition même, l'acte de la connaissance mathématique a formellement pour objet l'entité mathématique, celle-ci consiste en une ordination dont la quantité concrète constitue objectivement la possibilité, et dont la médiation assure par le fait même l'intelligibilité de cette même quantité. En bref, le réalisme tient que l'entité mathématique ne subsiste qu'en étant relative à la quantité, parce que l'esprit ne la conçoit qu'en nombrant la réalité. Or, si l'on s'oppose au réalisme, c'est-à-dire si l'on tient que l'entité mathématique subsiste comme entité indépendamment de toute référence à la quantité, l'entité mathématique ainsi conçue d'une manière fermée ne laisse pas d'intégrer les deux composantes qui lui sont co-essentielles, savoir : d'une part, la référence au [signe] « sensible » (par exemple à la flèche) : et, d'autre part, la reconstruction opérée par l'esprit. Mais, en fait, ces deux composantes sont nous l'avons vu, *disjointes* ; parce qu'elles ne sont plus ontologiquement coordonnées. Et comme, en droit, elles ne sont normées, chacune respectivement qu'en vertu de leur commune unité, elles deviennent, l'une et l'autre a-normées. C'est ce qu'il est aisé d'observer.

D'une part, la « reconstruction opérée par l'esprit » dégénère en productivisme mental.

Et, en effet, il est bien typique qu'en « mathématique mo-

derne » on parle de « *créer* » plutôt que de « *découvrir* ». C'est que la découverte porte sur la réalité et se termine dans l'idée, laquelle constitue le répondant mental de la détermination qui est objectivement immanente à la réalité. La « création »[72] porte sur le signe, lequel est normalement l'instrument de la découverte et le moyen d'exprimer l'idée. Si la réalité, en l'occurrence celle de l'entité mathématique, n'est plus prise en considération, le signe devient un pseudo-objet dont la création ne peut plus être normée par la découverte, et donne lieu par conséquent à une sorte de productivisme qu'on appelle trop souvent « créativité ».

Il est à craindre que l' « esprit de la réforme »[73] ne contribue à propager cette fièvre. Visant en effet à « mettre l'élève dans la situation véritable où les problèmes se posent » ([13], 58), sans pouvoir communiquer l'acte de chercher parce que c'est, nous l'avons vu, impossible, le maître fidèle à l' « esprit de la réforme » met en fait l'élève dans une situation que celui-ci ne peut affronter. L'élève s'évadera dans l'univers du signe, univers que premièrement il prendra pour la réalité et que deuxièmement il ne manquera pas de vouloir imposer aux autres comme étant la réalité. Cet écueil est il est vrai fort atténué dans les classes enfantines, car les enfants encore jeunes distinguent mal le symbole de la réalité et doivent être graduellement conduits à discerner celle-ci en celui-là ; discernement particulièrement difficile dans le cas de la mathématique. Mais, dès la classe de 6e, les élèves normalement doués seraient mieux induits à découvrir la réalité propre des entités mathématiques, en fixant une « formule bien précise » et sa signification, qu'en multipliant flèches et diagrammes indûment tenus pour d'authentiques créations. Quant aux moins doués, nous craignons que ce « jeu » ne les induise en la plus préjudiciable des erreurs ; celle de croire avoir compris, et de l'avoir fait à peu de frais : alors qu'en fait on n'a pas compris, pas même qu'il faut un humble et patient effort[74] pour discerner et vraiment comprendre la « réalité ».

(72) Encore une fois, nous visons la réforme comme telle, le nouvel enseignement comme tel. Et nous ne visons ni les réformateurs savants, en tant que mathématiciens, ni les authentiques découvertes qu'ils ont faites.

(73) M. A. Revuz le signale, fort justement. Mais nous craignons que les traités écrits, lesquels feront loi au point de vue de l'application, ne trahissent le dessein conçu par les auteurs de la réforme. Dans l'esprit de ceux-ci, les traités écrits ne sont que les instruments d'une communication qui doit être créée par le maître. Pour la plupart des utilisateurs, ces mêmes traités seront ce qu'ont toujours été en fait les

D'autre part, la référence à la quantité n'étant plus un constituant intégrant de l'entité mathématique, celle-ci, alors conçue d'une manière « fermée », ne peut pas être au point de vue ontologique, fondée. Ou bien donc elle n'a pas à l'être, ou bien elle l'est intrinsèquement, c'est-à-dire au point de vue de la fonctionnalité. Dans le premier cas, elle est supposée être un absolu, un pseudo-absolu, puisqu'en fait résorbée dans le signe ; alors que celui-ci doit ne faire que la représenter. Dans le second cas, elle est normée par l'utile ([13], 30), comme par une fin véritable ; alors qu'en réalité elle ne peut avoir d'autre « fin » que la beauté [74]. Telles sont bien, d'une part la conception moderne — et en fait « logique » — de la mathématique, d'autre part la justification de la mathématique moderne. Or cette quasi-réduction de la mathématique à la logique et cette justication par l'utile sont explicitement indiquées dans les traités modernes ; et cela, non seulement très fréquemment, mais si l'on peut dire « organiquement ». Elles sont en effet très précisément ce que vise la présentation de la mathématique à partir de la « Mathématisation de situations familières ».

Le dualisme épistémologique que met en œuvre le nouvel ordre d'exposition entraîne, par sa non-cohérence, la mutuelle contamination des disciplines en présence.

Le procédé qui consiste à partir de « situations familières » est certes excellent en lui-même, au point de vue pédagogique. Mais l'employer systématiquement et le présenter en fait comme constituant toute l'épistémologie de la mathématique, accélérera deux processus de contamination réciproque que l'on peut déjà observer.

Premièrement, au point de vue de la nature, contamination réciproque entre la logique et la mathématique. L' « arbre », qui correspond à la « situation », remplace le raisonnement qu'impère la résolution d'une « question ». Or l' « arbre »

manuels scolaires, savoir une norme, pratiquement « absolue ». Dès lors, les gauchissements qu'ils contiennent ou impliquent objectivement entraîneront inéluctablement leurs conséquences. C'est à ce point de vue, concret, que nous nous plaçons, pour analyser la « situation ».

(74) Or, précisément, le beau n'est pas la fin. Nous l'avons observé, et précisé, à propos de la « finalité » des mathématiques.

est un enchainement *univoque* de dichotomies dont chacune constitue simplement une application du principe de non contradiction. Tandis que le raisonnement est un ensemble *organique* de propositions, le principe de cette organisation étant la *proposition-medium.* Et comme la mathématique, même la plus élémentaire, présente d'authentiques raisonnements, on en détruirait l'originalité en la ramenant à l'univocité qui est propre à la logique. Nous ne disons pas que la présentation moderne entraîne par elle-même une telle réduction ; mais nous observons qu'en prenant systématiquement comme point de départ des « situations », elle diffuse en fait une conception de la mathématique qui est contaminée par celle de la logique. Et, en retour, cette logique mathématique tendant à devenir toute la logique, cette logique nouvelle est « fermée », comme l'est la « mathématique nouvelle » ; elle est donc contaminée, puisqu'elle ne peut plus être en fait ce qu'elle doit être par nature ; elle consiste à exprimer la cohérence de la pensée avec elle-même, au lieu d'être un instrument au service de l'intelligence ouverte sur la réalité.

Deuxièmement, au point de vue de la finalité, contamination réciproque entre l' « utile » et la mathématique. La « mathématisation d'une situation » ne peut concerner de celle-ci qu'un aspect : radicalement, qu'on veuille ou non l'avouer, l'aspect de la quantité. Il revient dira-t-on aux autres « spécialistes », non mathématiciens, d'examiner les autres aspects de la même situation. C'est indubitable. Mais ce pluralisme n'est justifié que si l'unité d'ordre en est fondée dans la réalité. Or, en fait, la mathématique, ou plus exactement une certaine mathématique, s'immisce dans toutes les branches du savoir, y compris les « sciences » de l'homme ; et ce fait constitue d'ailleurs l'une des raisons invoquées par les réformateurs en faveur de la nouvelle présentation des mathématiques. *Dans ces conditions, le pluralisme des différentes disciplines trouve sa cohérence dans l'univocité de la mathématique parce qu'il n'a plus, dans la réalité, le fondement de son unité.* En sorte que l' « utile » lui-même est celui que peut mesurer la mathématique, lequel n'est pas nécessairement l' « utile pour l'homme ».

Telle est l'origine de la technocratie. Les techniques étant condamnées à servir un « utile » qui n'est pas l' « utile pour l'homme », elles deviennent, pour l'homme, dictatoriales. On observe le fait ; il faudrait en considérer les causes, il faudrait reconnaître que le prestige d'absolu dont continue à jouir la mathématique même moderne, surtout pour les plus jeunes, contribue à accréditer et à imposer ce fait comme s'il était « de

droit ». Se faisant « moderne » en vue de mieux promouvoir les techniques, la mathématique polarise conformément à son propre point de vue la véritable notion de l'utile ; et le risque est grand qu'elle ne devienne le plus puissant des instruments idéologiques au service de la technocratie. En retour, d'ailleurs, cette orientation vers cette forme de l'utile qui ressortit à l'ordre matériel contamine l'idéal de la mathématique : lequel n'est pas à proprement parler l'utile, mais la beauté. Et si la beauté est utile, elle l'est d'abord en s'imposant comme gratuité.

Nous venons d'insister sur les écueils que comporte la nouvelle pédagogie envisagée au point de vue du contenu de l'enseignement. Il seront, il est vrai, évités par les maitres avertis et expérimentés qui rééquilibreront spontanément, en vertu même du réalisme vécu, l'épistémologie « fermée » et le pragmatisme anormé qu'impliquent l'esprit et la méthode des mathématiques nouvelles [75]. Mais les maitres nouveaux qui sont formés, hâtivement d'ailleurs, par les nouvelles méthodes, conformément au nouvel esprit, auront-ils le recul nécessaire pour demeurer, à l'égard de ce « nouveau », à la fois intelligemment accueillants et lucidement critiques ? « Parvus error in principio fit magnum in fine » ; et toute erreur, tôt ou tard, devient toujours l'origine d'un mal. Mieux vaudrait que les théoriciens du bourbakisme s'en rendissent compte dès maintenant.

2. La remise en question de la pédagogie au point de vue de ceux à qui l'enseignement est proposé.

Les deux aspects essentiels de la « réforme » concernent, d'une part la méthode, d'autre part le but de l'enseignement.

(75) La question ne se pose, nous paraît-il, que dans l'enseignement du second degré.. et au-dessus. Dans l'enseignement du premier

A. La remise en question des méthodes de l'enseignement.

Les « méthodes actives » étant bien connues, nous ne nous attarderons pas à les inventorier.

Le principe en est excellent. L'enseignement consistant en effet en une communication, il doit être fondé sur ce qui est, par nature, communicable : c'est-à-dire sur l'acte. En sorte que l'acte d'enseigner doit être, en vertu même de la communication qu'il établit, commun à l'enseignant et à l'enseigné qui, ensemble, recherchent la vérité. Telle est bien la « méthode active » ; elle vise à favoriser cette actuation en commun dans la vérité, plutôt qu'à transmettre un contenu déjà formulé.

Il faut cependant ajouter que, l'esprit créé n'étant pas acte pur, il n'y a pour lui ni acte sans contenu, ni acte identique à son contenu.

De là résulte que la « préséance » de l'enseignant sur l'enseigné se trouve fondée à deux points de vue différents, et d'ailleurs corrélatifs l'un de l'autre.

Formellement d'abord, c'est-à-dire au point de vue de l'acte en quoi consiste l'enseignement, il revient à l'enseignant d'avoir l'initiative de cet acte ; cette responsabilité fonde objectivement la primordialité du maître, même et surtout dans l'application des « méthodes actives ».

En second lieu, et en conséquence, le maître doit connaître le contenu qu'il doit faire découvrir ; et cela, parce que ce contenu est requis pour que soit possible l'acte en quoi la méthode active elle-même fait consister l'enseignement.

De là résultent deux conséquences également importantes dans l'ordre pratique.

D'une part, prétendre appliquer la « méthode active » sans communiquer un « contenu » serait une utopie : sans contenu

degré, des réactions opposées à la réforme ont déjà été observées. On doit reconnaître qu'elles ne sont pas toujours inspirées par un idéal désintéressé. Elles manifestent du moins l'allergie qu'éprouve toujours, à coup sûr quoique obscurément, le sens commun à l'égard de l'ésotérisme.

transmis, pas d'acte commun ; sans acte commun, pas de « méthode active ». La « méthode active » ne consiste pas à ne pas transmettre du « déjà connu » ; elle consiste en la manière de communiquer ce « déjà connu » : savoir en le faisant découvrir plutôt qu'en le faisant apprendre, et en le faisant apprendre en vue d'actuations ultérieures.

D'autre part, la « méthode active » suppose un maître « en acte ». L'enseignant qui saisissait en acte la vérité qu'il proposait mettait spontanément en œuvre la méthode active, bien avant que celle-ci ne fût codifiée. En retour, les maîtres qui se borneront à appliquer les recettes décrites dans les nouveaux manuels ni ne réaliseront l' « acte » d'enseigner, ni ne transmettront aucun contenu déterminé. Cela, évidemment, ne condamne pas la réforme ; mais cela rappelle que, comme les réformateurs le reconnaissent eux-mêmes, on n'en doit pas attendre ce qu'elle ne peut apporter.

Excellente en son principe, parce qu'elle retrouve à cet égard une vérité de toujours, la réforme requiert, quant à l'application, des maîtres en acte et des élèves dociles (« docibiles »).

B. La remise en question du but de l'enseignement.

Le but visé par la nouvelle pédagogie à l'égard de ceux à qui l'enseignement est proposé est de former des « têtes bien faites » plutôt que des « têtes bien pleines ».

« Du fait de la prolongation de la scolarité obligatoire, la mission de l'école primaire n'est plus d'enseigner les connaissances indispensables dans la vie courante mais surtout de former les esprits, de donner à chacun la capacité de s'adapter aux conditions largement imprévisibles de l'avenir. » ([5], 7.)

« Aucun élève ne devrait quitter le lycée sans avoir une idée assez nette de ce qu'est la démarche mathématique et sans avoir une disponibilité d'esprit suffisante pour être en mesure, dans son activité ultérieure, d'appliquer avec fruit et sans en être l'esclave, la méthode mathématique. » ([13], 66.) Et M. A. Revuz développe ces considérations dans le paragraphe qui

suit immédiatement, intitulé : « Il ne s'agit pas d'enseigner une science toute faite, mais de faire acquérir un mode de pensée. »

Cette manière de concevoir l'enseignement en général, et en particulier celui de la mathématique, nous paraît être la vraie. Mais peut-elle être universellement appliquée ? Est-il légitime d'en faire l'unique principe de l'unique manière d'enseigner ?

M. A. Revuz ne considère pas l'enseignement du premier degré ([13], 76). On est donc plus enclin à lui faire confiance, à la condition toutefois de ne pas oublier que tout acte requiert un contenu. Il n'est donc pas possible de « faire acquérir un mode de pensée » sans présenter les réalités, en l'occurrence les entités mathématiques, dont le type a précisément suscité, et continue de spécifier, ce « mode de pensée ». Mieux vaut certes induire l'élève à découvrir que lui demander d'apprendre. Mais l'un prépare l'autre, souvent à très longue échéance ; ce serait donc une erreur d'opposer « science toute faite » et « mode de pensée », bien qu'il soit légitime d'accorder au second préséance sur le premier.

L'enseignement du premier degré doit évidemment viser, comme tout enseignement, à former des têtes « bien faites ». « La mission de l'école primaire est *surtout* (?) de former les esprits » ([5] 7). Oui, mais nous nous permettons d'introduire, dans cette citation, un point d'interrogation. Car l'expérience induit à penser qu'il est chimérique de prétendre former des esprits par la mathématique moderne durant la scolarité du premier degré, même et surtout prolongée.

Il a toujours existé, parmi les maîtres de l'école primaire, d'excellents pédagogues ; et nous avons eu le privilège de pouvoir observer de très près tel et tel d'entre eux. Ils ne visaient pas à « former les esprits » ; mais, modestes et réalistes, ils avaient pour constante préoccupation de *faire réfléchir*. Ils enseignaient tout : le calcul et la grammaire, la géographie et l'histoire, ... tout le savoir « tout fait » ! Mais quelle que fût la matière, dont ils ne négligeaient rien, ils incitaient discrètement et inlassablement à réfléchir. C'était pour eux, en conscience, une mission, répondant à une sorte de vocation. Faire réfléchir : peut-on faire autre chose pour « former l'esprit », si l'on veut former sans déformer, s'adresser à tous en respectant chacun, éduquer un homme pour lui-même plutôt que forger un instrument spécialisé pour le service d'une société matérialisée ? Ces maîtres étaient et demeurent d'éminents protagonistes de la « méthode active ». Et ils réussissaient. Ils

créaient dans leur classe une atmosphère mentale bien différente de celle des autres classes ; et les élèves qui en avaient bénéficié conservaient pour toujours l'inclination à exercer la réflexion : ce qui était de surcroît fort utile, même aux moins doués, quelle que fût ensuite leur profession.

La mathématique, qu'elle soit moderne ou traditionnelle, peut certes apprendre à réfléchir. Mais si elle constitue un instrument, en un sens irremplaçable et certes offert à tous, deux conditions doivent être satisfaites par quiconque entend s'en servir. Ces deux conditions tiennent radicalement à la fonctionalité de l'instrument. Il faut, d'une part, *pouvoir en user* ; il faut, d'autre part, *savoir s'en dégager*. En l'occurrence, l'un et l'autre tiennent, nous l'allons voir, à l'ontologie même de la mathématique.

L'enseignement de la mathématique peut contribuer à former des « têtes bien faites », mais « positis ponendis ».

La mathématique étant « abstraite par nature » ([13], 67), elle ne peut induire l'intelligence à réfléchir que si celle-ci exerce son acte en prenant pour objet de « l'abstrait ». Or, quoi qu'en disent les réformateurs, les esprits qui « visualisent » l'abstrait, qui le « réalisent », qui pour ainsi dire vivent existentiellement la mathématique, ne sont qu'une minorité. Pour ceux-là, et pour eux seuls, la mathématique peut être le cheminement adéquat en vue de découvrir l'art de réfléchir.

On dira que la « mathématique moderne », bien que demeurant abstraite par nature, ne laisse pas d'être communicable à tous, attendu que nombre de questions sont présentées à partir de telle ou telle « situation ». Mais n'en est-il pas, de ces situations thématisées, comme des problèmes stéréotypés si âprement critiqués ? Elles ne sont généralement, surtout au niveau élémentaire, que du concret « artificiel », fabriqué en revêtant une structure abstraite de données usuelles. Et comme cet amalgame irréel n'a ni la netteté de l'idée, ni l'authenticité de la réalité, il égare les esprits obtus sans pouvoir intéresser les mieux doués ; il paralyse l'exercice de l'intelligence pour ceux-ci, sans le favoriser pour ceux-là. On ne rend pas la mathématique « concrète » en la faisant consister à construire des « arbres » en vue de résoudre des « situations » de roman policier. Que, selon les aptitudes ou les tempéraments, cela amuse ou cela ennuie, dans un cas comme dans l'autre *cela débouche sur le vide*.

La seconde condition sans laquelle la mathématique ne peut être un instrument approprié en vue de découvrir l'art de réfléchir est qu'elle « ne soit pas réduite à n'être qu'un pur jeu de l'esprit » ([13], 74). Autrement dit, seuls pourront apprendre à réfléchir en faisant de la mathématique, ceux qui, ayant « visualité » l'abstrait, sont capables de revenir au « non abstrait ». Cela vient évidemment de ce que « la mathématique est abstraite par nature », et de ce que l'acte de la réflexion ne porte pas exclusivement sur des abstractions.

Or, est-il besoin d'observer que, si les esprits capables de « visualiser » l'abstrait sont une minorité, ceux qui *en outre* conjuguent d'une manière permanente l'abstrait et le concret, en passant de l'un à l'autre sans les confondre, sont une *infime* minorité. Les élèves qui ne font pas partie de ce groupe privilégié, c'est-à-dire la grande majorité, ou bien ne sont pas intéressés et demeurent mentalement dans l'oisiveté, ou bien ne sont divertis qu'un instant par ce « concret » parfaitement irréel, vide d'intelligibilité.

La plupart de ces adolescents, souvent désœuvrés et turbulents, eussent fait de fort bons artisans. Confrontés avec des situations concrètes *réelles*, ils auraient en effet été contraints de faire œuvre d'intelligence dans des conditions conformes à leur possibilité, parce que radicalement conformes à l'ordre de la réalité ; on ne peut dominer la matière *que par l'esprit*, mais l'intelligence ne s'exerce d'abord *qu'à partir de données sensibles* : l'un et l'autre se trouvent imposés, non pas conceptuellement mais réellement par le concret « authentique ». Au contraire, les situations « thématisées », abstraites, ne présentent ni quant à leur base la même connaturalité avec l'esprit incarné, ni quant à leur résolution la même contraignante sollicitation.

Les élèves, très nombreux, qui ne peuvent, ni visualiser l'abstrait, ni a fortiori le conjuguer avec le concret, se trouvent donc « déphasés » par rapport à cet enseignement en fait coupé de la réalité ; et, trop absorbés par la scolarité, ils ne peuvent plus faire authentiquement œuvre d'intelligence en suivant le cheminement qui correspond en propre à leurs possibilités. Ils n'apprennent en fait ni à réfléchir ni à travailler. Aussi l'investissement de tout l'enseignement par l'esprit et par les méthodes de la « mathématique moderne », dans la scolarité prolongée du premier degré, a-t-il pour effet, non de « former l'esprit », mais de fabriquer des « déclassés ».

« La mission de l'école primaire est surtout de former l'esprit. » Oui ! cela tient tant à l'essence de l'enseignement quel qu'en soit le degré, et si peu à la prolongation de la scolarité, que les meilleurs maitres d'antan, bien avant la « réforme », déjà l'entendaient ainsi. Au moins quant au « fond ». Leur témoignage permet de situer avec exactitude la portée de la réforme, en fonction du rôle que doit assurer, dans la formation, l'enseignement de la mathématique.

L'enseignement de la mathématique moderne ne peut assurer, à lui seul, la formation de « têtes bien faites ».

Qu'est-ce en effet que former l'esprit ?

Peut-on former tous les esprits, en les exerçant à la même discipline ?

A qui doit-on, ou peut-on, confier la tâche de former des esprits ?

A ces trois questions, les réformateurs répondent, « positis ponendis », de la même façon. La mathématique moderne serait en effet le moyen privilégié pour former l'esprit, pour former tout esprit, en particulier pour former les maitres à qui il incombera de former des esprits. On peut l'admettre, sous les conditions que nous avons plusieurs fois précisées, s'il s'agit de « *former l'esprit » à la mathématique*. Mais partir de ce présupposé en vue de réformer l'enseignement du premier degré, dont l'écueil le plus notoire a toujours consisté en l'univocité, c'est achever de le « primariser ».

Former l'esprit, c'est « apprendre » à observer, à raisonner, à juger ; et cela, originellement, à partir de ce que les sens saisissent de la réalité. Les vrais maitres ont d'ailleurs toujours su que le mot « apprendre » est, en l'occurrence, employé quelque peu improprement. L'esprit portant ses propres normes immanentes à lui-même, on ne peut les lui « apprendre » du dehors ; mais on peut l'induire à les découvrir, et c'est cette « maïeutique », célèbre, à juste titre, que les pédagogues avertis pratiquaient, tout simplement en « faisant réfléchir ».

Or, si la mathématique, « traditionnelle » ou « nouvelle », constitue un instrument irremplaçable en vue de faire découvrir l'art de raisonner, elle est d'autant moins apte à « former » l'esprit au point de vue du jugement qu'elle est actuellement conçue comme étant « fermée », c'est-à-dire en fait comme

étant coupée d'avec la réalité. Et si cet écueil n'existe pas pour les très jeunes enfants, il se présente inéluctablement au cours de la scolarité *prolongée*, fût-elle du premier degré.

Les maîtres à qui cet enseignement est confié pourront-ils assumer le perfectionnement qu'apporte la nouvelle mathématique, tout en en rectifiant les présupposés au point de vue épistémologique ? La situation actuelle ne permet pas de l'espérer ; elle donne par conséquent à craindre que la « réforme » ne déforme, plus qu'elle ne peut former.

3. Questions d'ordre général soulevées par l'enseignement de la « mathématique nouvelle ».

La mathématique moderne, la manière de l'enseigner, font encore l'objet de vives discussions. Nous ne signalerons que pour mémoire les « objections » qui ont été faites ou que l'on peut faire, et qui par leur nature sont « accidentelles » ; c'est-à-dire qu'elles ne tiennent pas précisément à la « réforme » en elle-même, mais bien au fait que la mathématique « moderne » se présente comme étant une chose « nouvelle ». Nous préciserons ensuite les questions d'ordre général qui ont déjà affleuré au cours de cette étude, et qui nous paraissent liées à l'esprit de la mathématique moderne et aux méthodes de la pédagogie nouvelle.

A. Questions accidentelles, c'est-à-dire attenantes au changement comme tel, soulevées par l'enseignement de la « mathématique nouvelle ».

Le changement comporte par essence d'être non rigoureusement déterminé, et par suite de pouvoir être diversement in-

terprété, voire captieusement utilisé. N'observe-t-on pas généralement, au cours d'une période de « transition », le meilleur et le pire entremêlés ? Le dessein généreux sert d'instrument à la passion du lucre, et la trouvaille nouvelle flatte l'orgueil de l'esprit. Le « réformateur commerçant » existe, à tous les niveaux de l'enseignement. Existent également les pédants. Pédants vulgaires qui, trop bornés pour faire autre chose que « suivre », le font très vite et vont très loin, en vue de devancer tous les autres censés être obtus ou « retardataires ». Pédants « affectés » qui inventent les slogans, ou qui « éclairent » l'opinion en assimilant par exemple à l' « esprit de finesse » l'esprit de la mathématique moderne, tandis que la mathématique traditionnelle était alourdie de géométrie [76]. Existent enfin les partisans éclairés du « progrès de l'humanité » ; ils professent se garder de toute philosophie, lors même qu'ils érigent en principe universel d'explication voire en norme exclusive de l'agir, le postulat simpliste de l'évolutionnisme : « posterior, ergo melior ». « Ne dites plus ' sept pommes ' ; mais dites ' le nombre de cet ensemble, qui je le veux bien est un ensemble de pommes, est 7 ' ; tout en ira beaucoup mieux, en particulier l' « ensemblisme ».

L'optimisme qui accompagne l'avènement de la nouveauté, s'il a des formes plaisantes, en présente de sérieuses, et, par elles, se mue en déception. Chaque pédagogie offre évidemment les avantages en vue desquels elle a été inventée ; elle présente, non moins évidemment, des difficultés qu'on peut appeler « accidentelles », eu égard à une difficulté tout à fait « essentielle » : à savoir que réfléchir est chose difficile à pratiquer, encore plus difficile à communiquer. Une réforme, si elle n'est pas imposée par l'astuce à un troupeau de panurges, n'est socialement possible que si elle vise à écarter des inconvénients qui ont fait l'objet d'un constat suffisamment généralisé. Or, même si cette condition est manifestement réalisée, la réforme, qui se trouve ainsi suffisamment fondée, ne peut écarter la « difficulté essentielle » qui tient à l'exercice même de l'acte de réfléchir ; de plus, elle introduit d'autres difficultés « accidentelles » [77], à

(76) Mlle L. Félix explique, par exemple ([12], 1), qu'on expose les enfants à de graves déconvenues en leur enseignant que « deux + deux = quatre ». Il faut, selon cet auteur, s'exprimer en termes concrets : il faut remplacer le signe + par la conjonction « et », et le signe = par le verbe « faire ». Ce qu'il convient d'apprendre aux élèves, c'est donc que : « Deux (kilogs de sucre) *et* deux (kilogs de sucre) *font* cinq (kilogs) ... attendu que, concrètement, il faut évidemment tenir compte de l'emballage. »

moins qu'elle ne réintroduise, sous une autre forme [77], les difficultés mêmes qu'elle était censée devoir écarter. L'engouement du nouveau et la séduction de la mode feraient escompter que la réforme instaure, pour l'enseignement de la mathématique, des conditions aussi nouvelles que favorables. En réalité, au point de vue propre de la pédagogie, on ne peut codifier, et modifier, que l' « accidentel » ; et, pour le faire avec fruit, il faut viser, comme l'ont toujours fait les vrais maîtres, à communiquer l' « essentiel » : c'est-à-dire à favoriser l'exercice de l'acte, difficile, qui tient en propre à la nature de l'esprit.

B. La prétendue simplicité de la « mathématique nouvelle » est en réalité celle de l' « univocité ».

« Il n'y a pas de commune mesure entre l'évidente simplicité des notions de base concernant les ensembles, les relations, les lois de composition, et la complexité acrobatique des démons-

La « réforme Félix » se passe de tout commentaire ! Elle supprime évidemment la difficulté « accidentelle » (!) qu'a toujours soulevé le passage du concret à l'abstrait ; mais, non moins évidemment, elle donnera lieu à une autre difficulté « accidentelle » (?!) : ce seront les élèves, au moins les meilleurs d'entre eux, qui, comprenant par eux-mêmes que 2 + 2 = 4, apprendront à leur maître à compter ; tout comme d'autres élèves ont rappelé à leur professeur en quoi consiste l'acte de raisonner. Quant aux autres, les moins doués qui toujours sont les victimes, ils apprendront à confondre le « poids net » et le « poids brut ». Avant la réforme Félix, les écoliers les moins éveillés savaient que ces deux « poids » sont différents : le maître n'avait pas à insister sur ce que l'expérience rend évident. Mais cette manière de faire nuisait à la pureté de l'éducation mathématique, en y introduisant l'intuition triviale... Il sera évidemment beaucoup plus « mathématique » d'apprendre aux enfants à confondre ce qu'ils eussent spontanément distingué, pourvu qu'on ne leur apprenne plus, « comme autrefois », tout simplement à compter.

(77) M. Dienes imagine, pour rendre « concrète » la résolution de l'équation du second degré, des problèmes portant sur la distribution des voyageurs dans un train. Pour que l'artifice de présentation réussisse il faut supposer que le nombre des voitures qui composent le train est égal au nombre des compartiments de chaque voiture. Or

trations avec lesquelles on prétendait établir par exemple que la longueur d'un côté d'un triangle est inférieure à la somme des longueurs des deux autres » ([13], 63 - 64).

C'est vrai, mais à quel prix ? D'où vient cette « évidente simplicité » ?

Nous allons voir qu'elle tient à ce que les dites « notions de base » reposent toutes sur la seule opposition de contradiction ; laquelle fonde un type de simplicité qui, comparé aux autres types, est le plus simple mais aussi le plus pauvre, et qui, au vrai, est l'univocité.

Créées au titre d'instruments par la philosophie, les « catégories de l'opposition » constituent le critère propre qui permet de comparer entre elles les différentes philosophies.

Deux questions, celle de la multiplicité et celle du changement, dominent la philosophie de la nature ; elles se retrouvent, analogiquement du moins, en métaphysique. L'esprit incarné, qui comprend en composant et en divisant, pose ces questions en fonction de ce qui, dans la réalité, correspond à sa propre activité, c'est-à-dire en fonction des rapports qui existent soit entre les choses elles-mêmes soit entre les choses et lui-même. Et l'esprit forge, en vue d'étudier ces rapports, un instrument qui doit évidemment être conforme à la nature de l'objet considéré, être par conséquent une qualification du rapport comme tel. Cet instrument, dont l'esprit use spontanément, ce sont les « catégories de l'opposition », savoir : la contradiction, la relation, la contrariété, la privation [78].

cette clause est artificielle ; et elle permet une « résolution-type », que les élèves retiendront de mémoire. On a dénoncé, non sans emphase, cet inconvénient pour les problèmes du « premier degré » : le réservoir et les robinets, l'âge du père et celui du fils, les déplacements relatifs de deux mobiles etc. Il est non cohérent de faire, à propos du « second degré », ce qu'on a critiqué pour le « premier » ; d'autant que les élèves à qui on enseigne le « second degré » devraient normalement être capables de visualiser l'abstrait intelligiblement, et partant de le comprendre directement.

(78) Nous nous référons à la liste donnée par Aristote. Non pas précisément parce qu'elle est de lui, mais parce qu'elle est la plus complète. La « contrariété » et la « privation » se réfèrent à la théorie du changement. L'opposition de « contradiction » ressortit originellement à l'acte de juger. La « relation » se retrouve dans chacun des modes de l'être. Elle ne se réduit pas à un simple rapport établi

La nature de ces catégories n'est découverte qu'a posteriori, lorsque l'esprit réfléchit sur sa propre démarche, se plaçant ainsi au point de vue qui est celui de l'épistémologie. Apparait alors, de l'ordre mental à l'ordre physique, une foncière analogie. L'instrument conditionne la réalité qu'il permet d'atteindre, non certes en elle-même, mais bien en tant qu'objet atteint. Autrement dit tel instrument spécifie tel type de question et donc tel type de réponse [79] ; l'utilisation de tel instrument est donc nécessaire pour que tel aspect de la réalité soit atteint ; ou bien : ne pas user de certains instruments entraine de ne pouvoir connaitre certains aspects de la réalité.

Or, les philosophies se différencient, primordialement, les unes des autres par la manière de concevoir les rapports qui

par l'esprit; le signe en est que le terme « relatif » peut être affecté intrinsèquement par la relation qu'il soutient avec un autre terme. La relation est objectivement, entre deux extrêmes, la « tendance » du premier vers le second. La relation n'est, ni une réalité autonome, ni une idée pure. En discerner la réalité propre est aussi difficile que lourd de conséquences.

(79) Cette vérité a toujours été reconnue, au moins en première approximation. On sait qu'elle a pris, en physique, une portée toute autre lorsqu'on a découvert l'interférence qui existe entre l'instrument et l'objet. Le phénomène qu'il s'agit de mesurer est, au niveau microscopique, modifié par l'action propre de l'instrument utilisé pour l'observation. Cela ne détruit pas la notion d'objet, mais en rend pratiquement le discernement plus difficile. Préciser le degré de l'approximation selon lequel l'objet est atteint requiert, minimalement, de distinguer l'équation propre de l'instrument d'avec la mesure du phénomène observé. Il en va de même, analogiquement, dans l'ordre mental. L'objectivité de la connaissance ne peut être garantie que si, primordialement, on ne projette pas dans la réalité des catégories qui sont celles de l'esprit. Cette « projection » est ce à quoi aboutit en fait l'existentialisme, du fait qu'originellement il vise à connaitre sans utiliser les catégories qui sont celles de la réalité.

Ce « projectionisme » se retrouve en fait, « positis ponendis » et pour la même raison, dans la « mathématique moderne ». Les catégories de l'esprit remplacent en fait celles qui sont fondées sur la réalité extra-mentale. Et si l'axiomatique de la « mathématique moderne » ne comporte pas d'affirmer que les catégories de l'esprit soient celles de la réalité, tout se passe en fait, quant à l'application, comme s'il en était ainsi. La « réalité » tend, de plus en plus, à être réduite à ce qu'on en peut « faire », en employant au maximum du possible les ordinateurs. Il y a, entre la « mathématique moderne » et la technocratie, dans l'ordre pratique, une étroite corrélation ; que celle-ci soit ou non discernée et mise en œuvre par les réformateurs.

existent au sein de la réalité d'une part, entre l'esprit et la réalité d'autre part. Et comme ces rapports sont, en fait, appréhendés conformément aux catégories de l'opposition, il en résulte que si l'on veut discerner, entre les différentes philosophies, les affinités et les incompatibilités, le critère le plus précis consiste à examiner quelles sont celles des catégories de l'opposition qui sont respectivement utilisées dans chacune des philosophies considérées. Supposé qu'ont ait à juger les personnes, il convient de le faire en fonction de ce qu'elles font plutôt qu'en fonction de ce qu'elles disent. Cette règle vaut également pour les philosophes. Ce qui importe, au point de vue épistémologique, pour situer une démarche dans son ensemble, ce sont les types d'opposition que cette démarche met en œuvre *effectivement*, dans le raisonnement et dans les définitions qui constituent cette démarche.

La mathématique moderne ne met effectivement en œuvre qu'un seul type d'opposition, savoir l'opposition de contradiction.

Ce préambule, à la fois trop long et trop sommaire, était nécessaire en vue de situer la « mathématique moderne ». Tout comme les philosophies « modernes », depuis Hegel notamment, elle ne conserve en fait qu'un seul type d'opposition, savoir l'opposition de contradiction.

« Concernant les ensembles », les traités modernes se défendent de définir la notion d' « élément » ou d' « appartenance » ([14], 2, 15) ; ils se bornent à poser, par convention, un critère : « A la question 'tel élément appartient-il à tel ensemble ?', on doit pouvoir répondre *soit* par oui *soit* par non, soit l'un soit l'autre, non pas l'un et l'autre ». Ou bien : « cet élément appartient à cet ensemble » ; ou bien : « cet élément n'appartient pas à cet ensemble ».

Or, entre ces deux assertions, il y a, par définition même, l'opposition de contradiction : *est, n'est pas*. La notion d'ensemble, telle que la met en œuvre la « mathématique moderne », se résout donc, au point de vue intelligible, dans le fait de choisir entre deux jugements qui soutiennent entre eux l'opposition de contradiction.

« Concernant les relations », nous ne revenons pas sur

les considérations développées plus haut. Nous ne pensons pas que Bourbaki réussisse réellement à ramener la notion de relation à celle d'ensemble ; mais la définition de ce à quoi se trouve réduite la relation en Bourbaki comporte, nous l'avons vu, deux choses : premièrement, la notion d'ensemble, deuxièmement la réponse, *soit* par oui *soit* par non, à la question « ce couple vérifie-t-il la relation ? ». La notion de relation, telle que la met en œuvre la « mathématique moderne », se résout donc au point de vue intelligible, tout comme la notion d'ensemble, dans le fait de décider une alternative qui tient à l'opposition de contradiction.

« Concernant les lois de composition » enfin, on n'introduit pas de notion qualitativement nouvelle. « Réunion » et « intersection » d'ensembles reposent derechef sur le choix entre deux jugements qui soutiennent entre eux l'opposition de contradiction. La composition des relations n'est pas une reduplication sur elle-même de la notion de relation, mais bien l'application, faite de proche en proche à des couples considérés successivement, de la même notion de relation.

Enfin, la substitution, si avantageusement prônée, des « arbres » et de l'algèbre de Boole à la manière « ordinaire » de raisonner ([8], 90) revient à remplacer la démonstration positive, fondée sur l'unité de deux extrêmes dans un « medium », par un enchaînement de dichotomies dont chacune constitue une expression de l'opposition de contradiction.

Tel est donc le fait : les notions de base de la « mathématique moderne » ne font que combiner avec elle-même, par répétition de son application, l'opposition de contradiction. Que ces notions soient simples, c'est incontestable ; mais, d'après ce qui précède, il faut ajouter qu'elles le sont comme l'est l'opposition de contradiction. Nous sommes par conséquent amené à examiner quel est le type de la simplicité que cette sorte d'opposition est susceptible de fonder.

Mettre en œuvre l'opposition de contradiction conduit à des entités dont le type d'unité est l'univocité.

Il y a deux types de simplicité, savoir la simplicité proprement dite et l'univocité.

La cellule d'un vivant est simple, en regard de l'ensemble

dont elle fait partie. Le vivant lui-même est simple, en ce sens que le métabolisme en domine la complexité.

L'exposé élémentaire est simple, en ce sens que, retenant ce qui est essentiel, il écarte ce qui ne l'est pas. L'exposé plus complet est simple si, mettant en évidence les principes, il en développe organiquement les implications. Il est compliqué s'il ne respecte pas cette ordination.

La notion d'animal est simple, en ce sens qu'elle se retrouve la même dans les différentes espèces dont elle n'inclut cependant aucune des déterminations respectivement constitutives. La notion d'être est simple parce que l'être s'étend intégralement, en tout « étant », à tout ce que celui-ci est.

On voit donc que, tant au point de vue de la réalité qu'à celui de l'intelligibilité, celle-ci étant réflexive ou directement exercée, se retrouvent, analogiquement semblables d'un domaine à l'autre, deux acceptions concrètement réalisées de la « simplicité ».

Le premier type de « simplicité » est celui qui *exclut la « distinction »*. Car cette sorte de « simplicité » résulte de ce que l'on ne conserve, de toute « distinction » qui se présente, que l'un des deux termes. On exclut l'autre, en vertu de l'opposition de contradiction : on considère telle cellule de tel vivant, *non* les autres ; on retient telles données estimées essentielles, *non* les autres ; on abstrait et on conserve telle notion, *non* les déterminations dont elle est susceptible.

Ce premier type de « simplicité » peut être en affinité avec le « simplisme ». Quoi qu'il en soit, il convient de le désigner en propre comme étant l' « univocité ».

Le second type de « simplicité » est celui qui est *ouvert à la « distinction »*. C'est-à-dire que la « simplicité » de cette seconde sorte inclut la « distinction ». Et cela, soit explicitement, comme l'exposé bien ordonné ou comme le métabolisme du vivant ; soit implicitement, comme l'être contient les prédicaments. Ce second type doit s'appeler en propre ce que lui seul est véritablement : « simplicité ». Cette seconde sorte de « simplicité » est, dans l'entité dont la nature le comporte, ultime achèvement de l'unité.

La distinction entre les deux types de « simplicité », ou, en termes plus adéquats, entre l'*univocité* et la *simplicité*, se retrouve-t-elle dans le domaine de la mathématique ? La réponse ne peut être qu'affirmative, puisque toute entité, fût-elle

mathématique, est subalternée à la métaphysique. Nous allons, pour le confirmer, exprimer cette même distinction à partir des catégories de l'opposition. Et comme la mathématique n'est évidemment normée ni par la biologie ni par aucune des sciences consacrées à l'étude du changement, il convient d'écarter la « contrariété » et la « privation »[75], et de retenir seulement l' « opposition de contradiction » et la « relation ».

L'expression transposée de la distinction entre les deux types de « simplicité » est dès lors la suivante. L'*univocité* (ou « simplicité » du premier type) suppose, nous l'avons observé, une exclusion ; et elle fait, de cette exclusion, la condition de la « distinction ». Elle est donc fondée sur l' « opposition de contradiction » ; et elle exclut la « relation ». La *simplicité* (ou « simplicité » du second type) « englobe » la « distinction » ; c'est-à-dire que, concrètement, la réalité simple inclut simultanément les deux termes entre lesquels il y a distinction, partant leur unité, et donc leur « relation ». La *simplicité* est donc fondée sur la « relation » et elle exclut l' « opposition de contradiction ». L'*univocité* et la *simplicité* sont ainsi définies, quant à leur nature, d'une manière précise. Formellement, elles s'excluent mutuellement. Concrètement, elles peuvent, dans une même conjoncture mais à différents point de vue, se réaliser simultanément.

La mathématique nouvelle est plus simple que la mathématique traditionnelle, en ce sens que le Bourbaki univocise toutes les notions de base entre elles, au moyen d'un artifice conceptuel.

La notion de « simplicité » étant ainsi précisée : en quel sens la « mathématique moderne » est-elle « simple » ?

Etant fondée sur l' « opposition de contradiction », la « mathématique moderne » exclut *ipso facto* la véritable relation. C'est bien ce que l'on observe. Revenons à l'exemple si souvent cité dans les traités : « La relation 'père-fils' est le sous-ensemble [inclus dans tel ensemble de couples supposé donné] des couples qui vérifient cette relation ». Il est clair que la relation « père-fils » est ainsi signifiée comme existante selon l' « extension », à partir des « couples qui vérifient cette relation ». Elle n'est pas référée directement à la relation concrète entre tel père et tel fils, relation concrète qui est seule la véritable relation de paternité. Elle n'est pas une notion abstraite qui, même introduite au sein de la mathématique,

demeurerait « ouverte » sur la réalité. Elle est une notion « fermée », enfermée et contractée dans la notion d'ensemble, et ainsi altérée. L'exemple que constitue la relation « père-fils » montre donc, derechef, que la relation en général demeure, en Bourbaki, non définie ; elle est caractérisée en définitive, au point de vue épistémologique, comme résultant de réponses qui « décident » par « oui » ou par « non » un enchaînement de dichotomies.

La « simplicité », dont parle à juste titre M. A. Revuz pour les notions de base de la « mathématique moderne », est donc une simplicité d'univocité. Elle peut se réclamer de Cantor, non de Galois ; elle n'est pas la véritable *simplicité*, laquelle en l'occurrence ne peut procéder que de l'*acte-idée*.

Qu'en est-il à cet égard de la « mathématique traditionnelle » ? Comparée aux autres disciplines, étant mise à part la logique, la mathématique a toujours été considérée comme étant la science de l'univocité, parce que métaphysiquement « toute quantité est également quantité ». Toutefois, en ce qui concerne les « notions de base », la « mathématique traditionnelle » demeurait « ouverte » sur la réalité extra-mentale. L'unité, et en même temps qu'elle la simplicité, en étaient moins manifestes parce qu'elles ne provenaient pas de la conceptualisation ; mais n'étaient-elles pas plus riches, parce que fondées analogiquement sur l'unité de la réalité elle-même ?

Or ce sont bien les « notions de base » qui, d'une part, constituent l'objet principal de l'enseignement, et d'autre part se retrouvent dans les applications. On peut donc craindre que l'enseignement de la « mathématique moderne » ne contribue, indirectement mais efficacement, à propager l'attitude mentale qui consiste à envisager tout au point de vue de l'univocité que reconstruit l'esprit, non au point de vue de la réalité, qui en droit norme toute forme véritable de la vie. Et cette crainte se trouve encore accrue, du fait que, comme nous l'allons voir, les réformateurs entendent bien faire de la « mathématique moderne » l'instrument nouveau de la formation intégrale : mentale, sociale, voire même morale.

C. La « mathématique nouvelle » est destinée à devenir, à la faveur de contraintes d'ordre social, la norme de toutes les formes du savoir.

La « mathématique moderne » se trouve imposée à la manière d'une mode, mais aussi comme norme universelle de la pensée.

Cela est vrai, même dans l'enseignement élémentaire ; lequel est, comme tout l'enseignement de la nouvelle mathématique, polarisé par l' « ensemblisme » et par l'usage de la dichotomie. On a fait valoir, par exemple, que la « mathématique moderne » met un terme au mythe de l'élève doué pour les lettres et fermé aux mathématiques. Car celui qui ne comprend pas la grammaire des ensembles ne comprendra pas mieux, ni la grammaire tout court, ni cette partie essentielle de la philosophie qu'est la logique. C'est vrai, à la condition toutefois d'expliciter, *comme il se doit*, la clause que voici. Si on réduit les autres disciplines à la mathématique, il faut évidemment comprendre celle-ci pour comprendre celles-là. Or c'est bien cela que l'on observe. Non seulement la logique est actuellement réduite à ce qu'on appelait autrefois la « logique formelle » ; mais, en outre, celle-ci, au lieu d'être considérée comme l'art de raisonner, est présentée comme un enchainement « valable » d'opérations dont on peut pousser l'unification jusqu'à les faire toutes dériver de l'opposition de contradiction [80]. Quant à l'analyse grammaticale, elle ne considère plus la qualité ; elle consiste à décrire des situations, d'une manière il est vrai ordonnée. Dans ces conditions, il est clair que la « mathématique moderne » constitue la seule clé qui permette de pénétrer dans les domaines de la logique et de la grammaire ; mais il est non moins clair que ces disciplines, et d'autres encore, se trouvent privées de leur originalité propre, au bénéfice de cette « mathématique moderne » vouée à devenir l'unique instrument de toute la formation.

M. A. Revuz relève d'ailleurs la critique. « On accuse aussi

(80) Les « systèmes logiques » poussent plus ou moins loin cette univocisation, laquelle se réduit à un pur jeu de l'esprit. Nicod a montré qu'on peut définir toutes les opérations élémentaires de la logique à partir de l' « incompatibilité ».

les réformateurs de ne penser qu'à former de futurs mathématiciens ; le reproche est plaisant, car qui, en dehors des futurs mathématiciens, arrive à émerger de l'enseignement traditionnel et à retrouver le vivant et le sain derrière le fatras mort ?... Ce dont on a le plus besoin dans toutes les branches de l'activité humaine (recherche, industrie, commerce, agriculture) c'est d'esprits ayant une véritable formation, d'esprits capables de faire face à des situations nouvelles » ([13], 61).

On admet sans peine que la société ait besoin « d'esprits capables de faire face à des situations nouvelles ». La question est de savoir si les esprits de cette sorte peuvent être formés exclusivement, ou même principalement par la mathématique nouvelle. On est donc en droit d'estimer que la réponse de M. A. Revuz est aussi « plaisante » que le reproche dont il parle. Cette réponse revient en effet à ceci : « La mathématique traditionnelle n'était guère utile qu'aux futurs mathématiciens. Donc (?) il est normal qu'il en soit de même pour la 'mathématique moderne' ». On pourrait l'admettre, et conclure alors à l'inutilité de rien changer, à la condition cependant de restituer une clause qu'il n'est pas « sérieux » d'omettre. *Toutes choses égales d'ailleurs*, il n'y aurait pas à s'émouvoir de ce que l'enseignement de la mathématique, que celle-ci soit traditionnelle ou nouvelle, ne profitât guère qu'aux futurs mathématiciens. N'est-ce pas également vrai, proportionnellement, des autres enseignements ? Celui, par exemple, de la littérature, ou de l'histoire, ou du dessin ?

Mais il n'est pas vrai que « toutes choses soient égales d'ailleurs » pour l'enseignement « traditionnel » et pour l'enseignement « moderne » de la mathématique. Il y a, de l'un à l'autre, une sorte d' « inflation ». Et la critique qu'on en peut faire ne tient pas à ce que cette inflation puisse être utile aux futurs mathématiciens, mais bien à ce que, utile seulement à ceux-ci, elle ne soit imposée aux autres à la manière d'un totalitarisme. « Ce dont on a le plus besoin, c'est d'esprits ayant une véritable formation ». Oui ! mais il ne s'ensuit pas que cette formation doive se faire seulement ou même principalement par la « mathématique moderne ». Et si cette formation doit se faire *aussi* autrement, ne risque-t-elle pas d'être paralysée par l'hégémonie accordée en fait à la mathématique ? Il ne semble pas qu'on y prenne suffisamment garde au point de vue pédagogique.

« Les découvertes récentes de la psychologie permettent d'affirmer que tout être humain est marqué de façon prépon-

dérante par sa petite enfance. Il semble que ce soit particulièrement vrai dans le domaine de la formation mathématique » ([5], 10). C'est vrai. Si donc, en dépit de difficultés que les réformateurs eux-mêmes reconnaissent comme étant réelles[81], on tient à intensifier, même pour les plus jeunes, l'enseignement moderne de la mathématique, c'est précisément parce qu'on vise à rendre « prépondérante » pour tous cette sorte de formation dont cet enseignement est en propre l'instrument. Lorsqu'au terme d'une présentation, d'ailleurs fort intéressante et fort concrète, de certains « groupes », Madame Robert conclut : « L'intérêt de cette étude est de susciter des attitudes vraiment 'mathématiques' au delà de ce qu'on peut qualifier arbitrairement de mathématiques 'modernes' ou 'traditionnelles' »[82], on peut se demander à qui il est soit utile soit possible d'avoir une attitude « vraiment mathématique », sinon par définition même au mathématicien. Et pour « les autres » ? pour les non-mathématiciens, cette étude, si intéressante soit-elle en elle-même, mais dont la moyenne des enseignés n'apercevront pas la portée, fera-t-elle autre chose qu'alourdir la scolarité ? Ne peut-on craindre, dans ces conditions, que les réformateurs « aient pensé à former de futurs mathématiciens », sans prendre garde au préjudice qu'entraine la réforme pour l'ensemble des élèves ?

La pratique précoce et intensive de la « mathématique moderne » est favorisée et stimulée par les répercussions qu'elle a dans l'ordre social.

Le paragraphe de la « Charte de Chambéry » consacré à l' « aménagement de l'enseignement actuel » se termine par une phrase qui en précise l'inspiration et en explique les dispositifs : « tout devant être fait pour favoriser recrûtement et formation des scientifiques » (p. 122) ([5], 13). Et comme l' « aménagement » porte sur tout l'enseignement, du « premier degré » à la « terminale », il s'agit bien *en fait* d'une réforme de structure, totalitaire par nature, ordonnée à une fin poursuivie de telle manière qu'elle se trouve érigée en absolu : « tout

(81) « Pour les enfants, il est très difficile d'exprimer cela [intersection et réunion d'ensembles] correctement. » ([7], 47.)

« L'axiomatique ne pourrait intervenir (efficacement et sans danger) que vers 16 ans au plus tôt. » (M. G. Choquet [1], 22.)

(82) Etude sur quatre exemples de deux groupes à quatre éléments. Groupe de Klein et groupe cyclique ([3], 15).

devant être fait pour favoriser recrutement et formation des scientifiques ».

Pourquoi pas des « métaphysiciens » ? Observerait-on que ce n'est pas exclu ? Admettrait-on que tout « devrait » être fait pour favoriser recrutement et formation de sujets capables d'exercer avec fruit toutes les formes de l'activité humaine, celles du savoir en particulier ? On *devrait* « faire tout pour tout » ! Au conditionnel, tout le monde est d'accord. Mais agir oblige de choisir. « Faire tout » pour une chose entraine de ne faire, pour les autres choses, que peu ou rien. Inutile d'insister sur ce que la plus courte expérience rend vitalement évident. Le « dictat » que la Charte de Chambéry fonde sur « les découvertes récentes de la psychologie » instaure donc, qu'on le veuille ou non, pour l'enseignement de la « mathématique moderne » aux enfants même les plus jeunes, un régime de faveur qui doit, le cours des études se poursuivant, se muer progressivement en privilège d'exclusivité.

En désire-t-on confirmation ? L'emprise, même lorsqu'elle s'exerce sur la « petite enfance », se trouve parfois déjouée. Il faut donc « tout faire » pour récupérer, en faveur du contingent des scientifiques, ceux des élèves qui se seraient montrés « réfractaires » au cours de la formation première : « Sur un autre plan, et pour remédier au caractère trop strict de l'orientation en fin de Troisième, une possibilité doit être offerte aux élèves de Seconde A de passer en Première C ou D... » ([5], 13). Or il n'est pas question de la possibilité en quelque sorte réciproque : celle de passer de Seconde C ou D en première A. C'est-à-dire que l'orientation en fin de Troisième ne risque d'être « trop stricte » que si elle est l'orientation A ; tandis qu'elle ne peut évidemment risquer d'être trop stricte, si elle est l'orientation C ou D. Est-ce assez clair ? Comprend-on maintenant le sens véritable, c'est-à-dire la portée réelle, la portée dans les faits, du vœu « dictat » exprimé dans la Charte de Chambéry : « Tout devant être fait pour favoriser recrutement et formation des scientifiques ». *Tout*, jusqu'à sacrifier éventuellement les possibilités, déjà en cours de réalisation, qui eussent contribué à l'épanouissement d'un type de savoir autre que le type scientifique.

Force est donc de se rendre à l'évidence : la réforme constitue une « option » ; option en faveur d'une chose, et, inéluctablement en fait, contre une autre chose : en faveur du savoir

scientifique d'un certain type, et contre le savoir métaphysique dont se dissocient, dès l'origine et absolument, l'esprit et les méthodes de la « mathématique moderne ». Et cette option est d'ordre social, puisque conçue et promulguée par les corps constitués de la société actuelle, elle forge, par avance, en orientant l'enfance et la jeunesse, les cadres et les conditions de vie qui s'imposeront à la société de demain.

La mathématique est l'une des formes de la pensée. On n'est donc pas surpris d'observer, dans la « mathématique moderne », l'existence des tendances qui caractérisent la culture contemporaine. Mais le phénomène nouveau consiste en ce que l'osmose est plutôt de la mathématique vers la culture que de celle-ci vers celle-là. Il est vrai que rien ne s'introduit en mathématique qui ne soit considéré formellement au point de vue de la quantité, et que cela a toujours constitué un « filtrage » fort sévère. Mais, en retour, on n'avait jamais assisté à l'investissement de tout le savoir, et même de tout l' « humain », par la mathématique ; en cela consiste, au vrai, la « révolution copernicienne » dont on a parlé à propos de cette sorte de mathématique qui est dite « moderne ».

La gravité de cette « révolution » épistémologique commence de se manifester dans celle de l'option sociale qui en découle. Mais cette gravité ne deviendra évidente que progressivement ; elle ne paraît être pour le moment qu'un aspect du divertissement, tout comme l'irruption des jeux ensemblistes dans les jardins d'enfants. *Or, il s'agit en réalité d'un choix, irrévocable parce qu' « irréversible », entre deux conceptions de l'homme,* entre deux fins proposées à l'homme, entre deux manières de concevoir et de réaliser le rapport qui existe entre l'homme et la société.

Ces arguments, si importants, ressortissent à des considérants différents de ceux qui ont inspiré la présente étude. Nous ne nous proposons donc pas de les examiner en eux-mêmes. Mais la double exigence du réalisme et de la cohérence requiert de montrer que l'option fondamentale en laquelle nous apparaît se résoudre pratiquement la réforme de l'enseignement, premièrement correspond bien aux faits, deuxièmement découle organiquement, non certes de la « mathématique moderne » elle-même, mais bien de l'esprit qui l'inspire.

D. La « mathématique moderne » annexée par l'entreprise technicienne, conduit à considérer l'homme comme subordonné à la société.

Les principes dont s'inspire l'enseignement tel qu'il est actuellement organisé, sont manifestés par la pathologie des enseignés.

Les rapports entre un individu et le groupe dont il fait partie sont manifestés par des comportements et par des règles qu'il est aisé d'observer. C'est donc cela que d'abord il faut considérer, pour découvrir les principes qui sont effectivement appliqués bien qu'ils demeurent cachés.

L'accroissement du pourcentage, au sein de la population scolaire, des « inadaptés » et des « retardés », le foisonnement pour ainsi dire endémique de nouveaux types d'inadaptés, celui par exemple qui résulte de la prolongation de la scolarité du premier degré, sont des faits *nouveaux*. La cause, non certes unique mais principale, la cause qui, négativement mais radicalement, rend compte de cette dégradation, c'est que l'enseignement n'est plus conçu comme étant au service de l'éducation d'une personne mais comme le moyen de former des esprits « capables de faire face à des situations nouvelles », c'est-à-dire capables de servir la société.

Que font en effet les maîtres qui réussissent le mieux dans la tâche, si difficile à tous les degrés, de la réadaptation ? Ils mettent en œuvre, au prix de quel dévoûment ! le principe dont ils prouvent par le fait même qu'il est la vérité. Ils subordonnent à l'épanouissement de chaque personne l'enseignement qu'ils réinventent pour chacun des élèves qui leur sont confiés. La pathologie manifeste en général avec exactitude les conditions de la santé. Pour réadapter un inadapté, il est nécessaire et suffisant de réinstaurer l' « ordre ». L'ordre consiste en ce que, *primordialement*, la société est subordonnée à la destinée personnelle de chacun des humains qui la composent, et qui doit, en retour, la servir. Si on omet ce qui est primordial, ou si, équivalemment au point de vue pratique, on le relègue à une autre place que la première, l'ordre est détruit et le désordre prolifère.

Si l'enseignement est conçu *d'abord* en fonction de ce qui peut être utile à la société, c'est le « social » qui en devient inéluctablement la norme absolue, le « social » et le « valable », non plus même la vérité. Veut-on un exemple ? « marginal » sans doute, mais si typique : « *Dans la plupart des jeux, il conviendra d'attribuer un point par coup juste, c'est-à-dire admis comme juste par l'équipe adverse, même si d'ailleurs en fait c'est faux* » [83]. Le principe qui, en l'occurence, et pour le moins en fait sinon d'intention, est appliqué, est donc le suivant : « Au commencement est l'équipe, le groupe, le 'social' ou l' 'ensemble' ! » Nous n'inculpons évidemment pas les réformateurs, comme s'ils étaient responsables, de la curieuse règle proposée par M. Lerner en vue de former les élèves aux méthodes abstractives. Cette règle n'est certainement pas une conséquence de l'ensemblisme tel qu'il est au principe de la « mathématique moderne ». Elle n'en consiste pas moins à considérer le « groupe » comme constituant la norme suprême ; elle se trouve ainsi étroitement apparentée à la conception générale selon laquelle le savoir est normé *avant tout* par le « social ». Or telle est bien la conception qui inspire en fait le nouvel enseignement de la mathématique. Cet enseignement contribuera donc, en accréditant l'idéologie qui lui est sous-jacente, à propager les errances et les dégradations dont celle-ci est immanquablement la cause.

Le plus grave de ces dégradations, au point de vue social auquel nous nous plaçons en ce moment, consiste en la genèse d'une nouvelle dictature, celle de l'intelligence technicienne, laquelle n'est d'ailleurs pas nécessairement l'intelligence tout court. Ceux qui, toute leur vie, demeureront des [relativement] « retardés », ceux qui ne seront jamais parfaitement réadaptés, deviendront en fait, par le truchement du « social », les robots voués à exécuter les tâches savamment mécanisées que les techniciens font servir à un productionnisme indéfini référé à la « société en général », alors que la production doit être, tout comme d'ailleurs l'enseignement, normée par les besoins de l'être *humain* et par l'éducation de la *personne*. Entre les techniciens dirigeants et les robots dirigés, se creusera de plus en plus un fossé que l'exercice de l'intelligence ne fera qu'approfondir ; attendu que celle-ci, infidèle à l'exigence de sa

(83) J.-M. Lerner. Problèmes matériels et d'organisation posés par l'usage des méthodes abstractives ([2], 77).

propre nature, pose les questions qui concernent l'ordre de la société au seul point de vue que puisse suggérer et accréditer la visualisation ensembliste et la résolution par dichotomies, savoir celui de l'uniformisation.

Or, précisément, c'est le fait de se placer à ce point de vue qui induit inéluctablement à confondre : relation et juxtaposition, ordre et répétition, organisation et systématisation. Et l'expérience montre que ces errances sont radicalement à l'origine de dissensions et d'oppositions auxquelles il est évidemment impossible de remédier, si on persiste à se placer au point de vue qui, inéluctablement, les provoque. Car, l'application du remède ne fait et ne peut faire, telle qu'elle est conçue, qu'aggraver le mal ; la raison en est que, le totalitarisme se présentant comme englobant « tout », on lui attribue inconsidérément une auto-consistance à laquelle on se réfère spontanément, bien qu'elle ne soit en réalité, l'expérience le prouve, qu'un mirage forgé par l'esprit.

Et l'on attend, de ce « tout » factice qu'il rectifie les déviations d'où il est issu en tant précisément qu'il est factice. Schématiquement, on peut dire que, le rapport étant altéré, la partie et le tout se contaminent l'un par l'autre mutuellement : alors qu'ils doivent, en vertu de leur corrélation, s'achever chacun respectivement. Or, cette sorte d'antinomie, lourde de conséquences dans l'ordre pratique, découle inéluctablement de la contradiction, à la fois plus subtile et plus aiguë qu'instaure, dans l'ordre théorétique, l'esprit selon lequel est conçue la nouvelle mathématique. C'est ce que nous allons maintenant esquisser.

L'axiomatique qui est propre à la mathématique nouvelle, rend compte des principes dont s'inspire l'enseignement actuel.

● L'axiomatique qui est propre à la mathématique nouvelle, peut être caractérisé de trois manières qui sont équivalentes entre elles.

Nous nous référons, encore une fois, pour plus de clarté et de précision, aux deux catégories de l'opposition qui intéressent formellement la mathématique, savoir l'opposition de contradiction et la relation. Voici quelques précisions concernant ces deux types d'opposition.

Originellement, l'opposition de contradiction est, rappelons-

le, celle qui existe entre deux jugements portant sur le même lien entre ce sujet et ce prédicat. Par dérivation, et non sans risque de confusion, on étend aux choses elles-mêmes, aux choses qui toujours en fait ont raison de « sujet », l'opposition de contradiction qui, en toute rigueur, ne vaut que pour les « jugements ». On comprend ainsi pourquoi le choix qu'exprime une opposition de contradiction est « ségrégatif », c'est-à-dire qu'un tel choix exclut ce qu'il ne retient pas. De même que le jugement affirmatif exclut le jugement négatif dont il est le corrélat, et réciproquement, ainsi choisir entre deux termes dont on suppose qu'ils soutiennent entre eux l'opposition de contradiction exclut celui des deux termes qu'on ne retient pas. Or cela n'est conforme à la réalité, et par conséquent à la vérité, que s'il n'existe pas, du terme que l'on retient à celui que l'on exclut, une relation en vertu de laquelle celui-ci est la condition de celui-là.

Ainsi, deux termes étant considérés, voici trois choses équivalentes entre elles, en ce sens que chacune entraîne les deux autres :

1. Ces deux termes soutiennent entre eux l'opposition dite de contradiction ;

2. Le choix de l'un de ces deux termes est ségrégatif, c'est-à-dire qu'il exclut l'autre terme ;

3. Il n'existe pas de relation, du terme éventuellement choisi à celui qui ne l'est pas.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser avec précision l'axiomatique qui est propre à la mathématique moderne.

L'esprit qui anime la « mathématique moderne » se manifeste, nous l'avons vu, dans la *manière de concevoir* les notions de base. Nous disons bien « dans la manière de concevoir » : quoi qu'il en soit, en effet, du choix de ces notions, celles-ci sont définies au point de vue proprement mathématique comme étant « fermées ». C'est-à-dire qu'au moins prétendument, elles sont *re*définies, indépendamment des notions « triviales » auxquelles elles correspondent ; elles sont coupées d'avec ces notions, et posées comme des absolus séparés. Si donc on considère les deux formes homologues de la même notion, et même doit-on dire en fait deux notions homologues, l'une « triviale », l'autre « mathématique », on voit que, selon la manière de concevoir qui caractérise l'esprit de la « mathématique moderne »,

la notion mathématique, d'une part ne soutient aucune relation avec la notion triviale puisqu'elle en est « coupée », d'autre part fait l'objet d'une visualisation « ségrégative », en ce sens que l'esprit la pose comme un absolu en excluant de considérer la notion triviale. On reconnait les deux derniers des trois caractères dont nous venons de montrer l'équivalence. Il s'ensuit que, d'une part cette équivalence est pour autant confirmée, et que d'autre part la manière de concevoir les notions de base qui est propre à la « mathématique moderne » peut également être signifiée au moyen du premier des trois caractères.

Et par suite, la différence de situation entre la mathématique « traditionnelle » et la mathématique « moderne » est susceptible de trois expressions qui sont équivalentes entre elles. Ces expressions correspondent respectivement : au point de vue de l'épistémologie, au point de vue de la psychologie, au point de vue de l'ontologie. Elles peuvent s'énoncer comme suit.

Etant considérées la forme triviale et la forme mathématique d'une même notion de base :

1. La mathématique « moderne » conçoit le rapport de l'une à l'autre comme étant une opposition de contradiction, la mathématique « traditionnelle » comme étant une opposition de relation ;

2. La mathématique « moderne » admet que la visualisation de la notion mathématique est ségrégative, c'est-à-dire qu'elle exclut la visualisation de la notion triviale ; tandis que la mathématique « traditionnelle » admet que la visualisation de la notion mathématique n'exclut pas celle de la notion triviale ;

3. La mathématique « moderne » récuse qu'il y ait, de la notion mathématique à la notion triviale, une relation réelle ; relation dont la mathématique « traditionnelle » admet l'existence.

Cette « triangulation » *ex-plique*, nous l'allons voir, les caractères dont se trouve affecté le nouvel enseignement, en vertu de l'esprit qui anime la nouvelle mathématique.

● Les trois manières de caractériser l'axiomatique qui est propre à la nouvelle mathématique, correspondent, respectivement, aux trois tendances qui sont inhérentes au nouvel enseignement. Le nouvel enseignement se présente, pour ceux qui le suivent, avec une cohérence qui les séduit. Mais il les isole, par son ésotérisme, et il les conduit à l'idéalisme. Examinons successivement chacun de ces trois caractères.

La cohérence du nouvel enseignement résulte de ce que le plus simple des types de l'opposition, savoir la contradiction, y est mise en œuvre exclusivement. L' « ensemblisme » et l'usage de la dichotomie jouent un rôle propondérant, dès la phase la plus élémentaire de l'enseignement. Et, nous l'avons montré, ils se résolvent radicalement, quant à l'intelligibilité, en l'opposition de contradiction. Or cette même opposition de contradiction, entre le « trivial » et le « mathématique », fonde, au point de vue épistémologique, les notions de base de la nouvelle mathématique. Se retrouve donc, dans le développement conséquent, ce qui, dès et dans le principe, est déjà posé latent. Cohérence parfaite, qui est en propre celle du « système ».

N'est-il pas opportun de rappeler que « tout être humain est marqué d'une façon prépondérante par sa petite enfance » ([5], 10) ? Ne convient-il pas de faire observer que la cohérence exerce toujours sur l'esprit une emprise considérable, irrésistiblement si elle se présente à des esprits jeunes, non formés et inexpérimentés, avec tous les atours de l'absolu et par conséquent de la vérité ; et cela d'autant plus insidieusement qu'elle se manifeste seulement à l'usage en demeurant d'abord voilée. La « société » ne sera-t-elle pas — n'est-elle pas ! — contrainte de renier ces enfants qu'elle prétend éduquer, alors qu'en réalité elle les berce, sans qu'ils le sachent, et sans peut-être qu'elle le sache elle-même (?), dans l'opposition de contradiction, et risque de les retrouver, « adultes », dans la « contestation ». « Ne me parlez pas de ces bourbakiens, ils me prennent pour une intersection ! » Or précisément, je suis et veut être moi-même ; et non pas la résultante ou tour à tour l'instrument de tendances contraires entre-elles.

* *

L'ésotérisme du nouvel enseignement vient de ce que, tout comme dans la visualisation qui est propre à la mathématique nouvelle, on y exclut définitivement ce qu'il est légitime de ne pas considérer provisoirement. La mathématique a toujours été considérée, à tort ou à raison, comme étant ésotérique. Une constatation nouvelle cependant, à cet égard s'impose. Le profane qui s'aventurait dans un traité de mathématique « traditionnelle » ne comprenait pas en général la signification des formules, même si celles-ci n'utilisaient que les signes rendus familiers à tous par l'enseignement le plus élémentaire ; il pouvait du moins suivre le texte, rédigé en langue ordinaire, et surtout conçu d'une manière, si l'on ose dire également « ordinaire », c'est-à-dire conformément à la permanente réin-

vention qu'opère spontanément la pensée, même lorsque celle-ci est réfléchie. Le même lecteur, s'il ouvre un ouvrage de « mathématique moderne » n'y trouvera même plus ce divertissement compensateur. Tel est le fait, quoiqu'il en soit de la manière dont on l'apprécie.

Or ce fait n'est que l'indice, en lui-même sans importance, de la manière « moderne » de visualiser, dès l'origine, les notions de base de la mathématique. Visualisation « ségrégative », en ce sens que, prenant pour objet la forme proprement mathématique de telle notion : premièrement, elle n'a pas pour objet la forme triviale de la même notion, ce qui va évidemment de soi ; deuxièmement, et ceci est propre à la « manière moderne », la dite visualisation *exclut*, positivement, de son propre champ, cette même forme triviale. Or, cette option mentale, qui consiste à « *exclure* positivement » ce qu'on ne retient pas, au lieu de simplement ne pas le considérer, devient une sorte de pli ; elle s'étend, fort logiquement et fort naturellement, à tous les instruments même les plus élémentaires qui servent à relier entre elles les entités de base et qui subissent l'attraction de la connexion-type, savoir la « dichotomie ». Dans ces conditions, se trouvent exclus, « in radice », aussi bien le « modus loquendi » « ordinaire », que le « modus concipiendi » « spontané ». La mathématique n'est plus seulement « ésotérique », elle est devenue « hermétique ».

Le résultat ? Il est possible qu'il soit bénéfique pour les mathématiciens. Ils ont à leur disposition, de par les conventions que fonde cette manière de visualiser les entités mathématiques, un instrument qui, d'une part est plus précis que le langage « trivial », et qui d'autre part facilite les échanges d'ordre proprement mathématique. Quant à la distinction entre « exclure » et « ne pas considérer », concernant la forme « triviale » de telle notion de base, il est clair qu'elle n'a ni aucune importance ni aucune portée pour le mathématicien lui-même, pour le mathématicien en acte. C'est qu'en effet l'exercice d'un acte n'est pas conditionné par les virtualités dont il ne laisse pas de pouvoir être le principe. Pour qui ne s'intéresse qu'à l'exercice de l'acte, faisant ainsi profession d'être spécialisé dans l'exercice de cet acte, ce qui ne se rattache à cet exercice qu'au titre de virtualité aléatoire, en fait, importe peu. On l'admet sans peine, à la condition évidemment que le spécialiste ne prétende pas imposer à tous l'attitude qui lui est concédée, à lui spécialiste et en tant que tel, bien qu'elle ne soit pas parfaitement conforme à la vérité.

Mais introduire l' « hermétisme » dans l'enseignement, et qui plus est le faire dès le niveau élémentaire, ne peut être justifié.

Et si les réformateurs alléguaient la formation des futurs mathématiciens, ils justifieraient par là, d'après ce que l'on vient d'observer, non l'esprit et les dispositifs du nouvel enseignement, mais bien la critique qui leur a été adressée : celle d'avoir conçu la réforme expressément en fonction d'un groupe privilégié ([13], 61).

D'autre part, il est à craindre que les élèves formés à l'école de l'ésotérisme et de l'hermétisme, c'est-à-dire habitués à leur insu à exclure ce que l'esprit ne considère pas, ne puissent être à l'aise devant les « situations nouvelles » qu'en rendant celles-ci « ésotériques », et donc en *excluant* de considérer les liens que soutient telle situation formellement mathématique avec ce qui n'est pas mathématique ? Penserait-on que, pour « faire face à des situations nouvelles », on puisse prétendre changer la face de l'humaine réalité ? Croire possible de réajuster *ce qui est* aux vues de l'esprit, n'est-ce pas très précisément le commencement de l'utopie ?

L'idéalisme auquel induit le nouvel enseignement consiste en ce que les notions n'y sont plus considérées dans leurs relations à la réalité ; tout comme dans la nouvelle mathématique, les entités sont considérées comme étant « fermées ». Il paraîtra peut-être étrange d'évoquer l'idéalisme, voir même une certaine mystique, alors qu'il paraît ne s'agit que mathématique ? S'il en était ainsi, s'il ne s'agissait tristement que de la mathématique, les considérations que nous développons à propos des caractères dont se trouve affecté le nouvel enseignement seraient, nous le répétons, vaines. Mais il n'en est rien ; car ce dont il est question, à propos de ces caractères, ce n'est pas de la mathématique pour ainsi dire formellement prise, mais bien de la nature du rapport que la mathématique soutient avec ce qui n'est pas formellement mathématique, c'est-à-dire avec toute la réalité prise dans son ensemble, et par suite, primordialement, avec ce qui, de cet ensemble, est le plus proche de ce qui est formellement mathématique. C'est donc, en fait, le rapport entre la forme « triviale » et la forme « mathématique » d'une même notion qu'il importe de considérer ; il contient en effet, virtuellement[84] mais infailliblement, un rapport plus ample avec

(84) Nous entendons « virtuellement » au sens que fonde l'étymologie. « Virtus » signifie « qui a la vertu de », « qui a positivement la capacité de produire un certain effet ».

lequel il est par conséquent en exacte conformité, savoir précisément le rapport que soutient la mathématique avec toute la réalité.

On comprend dès lors pourquoi et comment la manière de concevoir le rapport « restreint », savoir celui qui existe entre les deux formes de la même notion, peut engager une position philosophique et même « mystique ». Cette manière de concevoir s'étend en effet, de soi nécessairement, au rapport plus ample ; or celui-ci, à son tour, ne fait que manifester, conformément à l'ordre propre de la mathématique, la situation qu'entend s'assigner à soi-même, en regard de la réalité, l'homme en tant qu'il est esprit. Nous serons ainsi conduit à reconsidérer, en sa source même, l'option dont nous avons déjà précisé (pp. 162-164) les répercussions en nous plaçant au point de vue des rapports de société ; il va en effet s'agir de l'option entre deux conceptions de l'homme, et non plus seulement entre deux manières de concevoir le rapport qui existe entre l'homme et la société.

E. L'inspiration bourbakienne sous-jacente à l'épistémologie de la « mathématique moderne », induit l'esprit à l'affirmation absolue de soi-même.

L' « option » qui, en mathématique, décide de l'épistémologie, et l'option qui, concrètement, fonde l'engagement de la vie, sont, quant à la structure, en rapport d'homologie. Elles sont donc, en fait, « décidées » de la même manière par le même sujet, si elles sont en outre, quant à la réalité, en rapport d'analogie.

Mieux conscient de l'enjeu, revenons à l'option qui d'abord l'engage et qui enfin le constitue : option aléatoire, ne relevant semble-t-il que de la spéculation, entre deux manières de concevoir le rapport que soutient l'entité mathématique avec la réalité ; option en vérité radicale et partant « irréversible », entre deux manières de concevoir l'homme et sa destinée.

Entre les deux « cas », il y a ceci de commun que l'on peut en l'un comme en l'autre, soit refuser, soit admettre l'existence

d'une relation. La « mathématique moderne » rejette en effet qu'il y ait, de la forme mathématique à la forme triviale d'une même notion, une relation réelle : relation dont la mathématique « traditionnelle » admet l'existence. Telle est la manière d'exprimer, au point de vue de l'ontologie qui est sous-jacente à la mathématique, la différence, et même l'opposition, entre les deux manières, l'une « nouvelle », l'autre « traditionnelle », de décider la même « option » [85].

Et d'autre part, l'homme, en tant qu'il est esprit, peut accepter ou refuser qu'il existe, radicalement au degré de l'être, une relation à Autre que lui, de ce qu'il est lui-même et de ce qui est de lui.

Ainsi l'acte d'opter porte ici et là, sur l'existence d'une relation. Dans le domaine mathématique, le rapport « restreint » entre les deux formes, l'une « triviale » et l'autre mathématique de la même notion, comporte une relation, si cette notion est conçue comme étant « ouverte » ; et ce même rapport « restreint » ne comporte pas de relation, si cette notion est conçue comme étant « fermée ». Dans l'ordre de la vie, le rapport « large » de l'homme en tant qu'il est esprit à la réalité prise dans son ensemble, comporte, au regard de l'homme une relation, si l'homme reconnait l'existence d'un Etre absolu, c'est-à-dire d'un Etre indépendant de ce qui n'est pas Lui ; et le même rapport « large » ne comporte pas, au regard de l'homme, de relation, si l'homme refuse l'existence d'un Etre absolu, c'est-à-dire d'un Etre indépendant de ce qui n'est pas Lui.

Quoi qu'il en soit des options que spécifie en fait l'*exister* de ces relations, relations dont nous ne pouvons ici examiner la nature, la question que soulève l'enseignement « moderne » de la mathématique est celle de savoir s'il existe

(85) Le mot *option* désigne l'action d'opter. *L'option* a donc pour matière l'alternative qu'elle consiste à « décider ». On emploie parfois le mot *option* pour signifier, improprement, le résultat de l'action d'opter ; *option* désigne alors l'*un* des deux membres de l'alternative sur laquelle porte l'acte d'opter, et exclut l'autre membre. Nous employons le mot *option* en son sens propre : *action d'opter*. D'autre part, dans ce qui suit immédiatement, nous désignons, par le mot « option », cette option particulière qui concerne l'épistémologie de la mathématique : existence, ou non existence, d'une relation réelle, de la forme mathématique à la forme triviale d'une même notion. Les guillemets rappelleront qu'en l'occurence l'acte d'opter n'est pas, en général, délibérément posé. L' « option » se réduit, pour la plupart de ceux qui font la mathématique, et pour tous ceux qui en vendent, à accepter, sans le critiquer, ce qui leur est proposé.

un rapport et quel il est, entre ces deux options. La première « option » porte, répétons-le, sur les deux manières de concevoir le rapport, que nous appellerons « rapport restreint », entre les deux formes d'une même notion. La seconde option porte sur le fait, pour l'homme, d'admettre ou de ne pas admettre que Dieu existe ; ou, équivalemment, cette seconde option porte sur les deux manières selon lesquelles l'homme conçoit le rapport qu'il soutient avec Autre que lui-même. Il est évident que, de l'une de ces options à l'autre, il n'y a pas d'implication nécessaire quant à la qualification ; c'est-à-dire que, de soi, l'une peut s'exprimer dans un « oui » et l'autre dans un « non ». Mais nous n'envisageons pas ici une connexion « en soi ». Nous nous plaçons à un point de vue très concret ; nous nous demandons quels peuvent être les effets, pour l'enseignant et pour l'enseigné, de l'enseignement tel qu'il est actuellement préconisé et déjà pratiqué ? Nous nous demandons quelle est, et quelle sera, la « mentalité » que cet enseignement contribue à forger et à accréditer ?

Car, concrètement, les « options » que pose une même personne dans les différents domaines qu'embrasse son agir sont solidaires les unes des autres ; et elles le sont d'autant plus qu'elles découlent spontanément de principes plus primitifs, lesquels ressortissent en définitive à la nature même de l'être.

La question qui importe concrètement, concernant l'enseignement qu'inspire l'esprit de la « mathématique moderne », est donc celle-ci : l' « option » qui, au point de vue propre de la mathématique, traduit cet « esprit » ne serait-elle pas, en fait parce qu'en acte, la manifestation d'une autre « option » : à savoir cette option simple en elle-même et universelle par ses conséquences que l'esprit, confronté avec l'être, se trouve contraint de poser ; bien que, en l'occurrence, l'acte d'opter en regard de l'être ne soit en fait exercé que relativement à un domaine particulier ? En sorte que, l' « option » qui concerne en propre la mathématique ne serait que l'acte dans lequel l'option simple et universelle se trouve exprimée ? Telle est donc la question, car elle engage en fait toute la vie par la réponse qui lui correspond. Si, en effet, cette réponse est affirmative, si l' « option » qui concerne le domaine intelligible et l' « option » qui concerne le domaine de l'être sont, de soi, la même option, l'unité que réalise le subconscient d'un même sujet entre la pensée et l'agir entraîne en fait que la « décision » de cette option soit la même, d'une part dans l'ordre intelligible, d'autre part dans l'ordre de l'être. En sorte qu'en imposant comme étant la vérité telle manière de

« décider » l'option dans le domaine intelligible, l'enseignant induit et même contraint l'enseigné à décider de la même manière cette même option en tant que celle-ci ressortit au domaine de l'être. Et, ainsi, la nouvelle mathématique communique à l'enseigné, insidieusement, la manière nouvelle de concevoir la vie dont elle témoigne chez l'enseignant.

Que l'option à l'égard de l'être soit en réalité toute la substance de l' « option » ? telle est donc bien la question.

D'une manière plus précise, nous avons observé (pp. 170-171) que ces « deux options », considérées comme distinctes eu égard aux domaines dans lesquels elles s'exercent, sont, quant à la structure, en rapport d'homologie. Sont-elles, en outre, « un » au point de vue de l'être : lequel, en l'occurrence, est celui de l'acte ? Sont-elles, quant à la réalité, en rapport d'analogie ?

L' « option » qui concerne en propre l'épistémologie de la mathématique, et l'option simple et universelle qui concerne l'être sont, au point de vue de l'être et de l'acte, en rapport d'analogie.

Qu'il faille répondre affirmativement à la question posée, c'est cela qui est conforme à la vérité. Il suffit pour le voir de considérer l' « option » non pas seulement quant à sa formalité, mais également en tant qu'elle est une réalité, c'est-à-dire en tant qu'elle est un acte exercé. Et comme, en quelqu'ordre que ce soit, le « maximum » est qualitativement mesure et norme, la situation de l' « option » comme acte exercé se trouve dévoilé au mieux, lorsque cet acte consiste à « créer ».

● L'acte de créer dont est capable l'esprit créé, est « création » au sens propre quant à l'*ordre* mais non quant à la matière de ce qui est créé.

En quoi consiste exactement ce qu'on appelle « création » dans le domaine de la mathématique, ou d'ailleurs dans celui de l'art ? La « création » consiste en l' « acte-idée » : acte dont l'unité simple intègre, nous l'avons vu, deux actuationsj qui sont formellement et réellement distinctes : l'actuation-origine consiste en un « choix négatif » qui « découvre », c'est-à-dire qui libère l'esprit de ce qui l'eût empêché de « voir » ; l'actuation terminale est réalisée et spécifiée dans la saisie de l'idée. L'actuation-origine est évidemment impossible sans un donné qui lui soit antécédent au moins ontologiquement, puis-

qu'elle consiste à en abstraire et donc le suppose. L'actuation terminale ne subsiste qu'en vertu de ce qui précisément en est le terme, savoir l'idée nouvelle.

Eu égard à l'actuation terminale et à la « nouveauté » de l'idée, l' « acte-idée » consiste, en un sens, à créer [88]. Il fait, en effet, déboucher l'esprit sur *un ordre* nouveau. Or, l' « ordre » étant, par nature, simple, tout « progredi », tout développement homogène et continu, est exclu, d'*un premier ordre* à *un second ordre*, en tant qu'ils sont l'un et l'autre *ordre* : et, par suite, le second ordre, en tant qu'il est de l' « ordre », ne procède de rien : il est, par définition même, « créé » [88]. Au contraire, eu égard à l'actuation-origine, il est impossible que l'acte-idée soit une création, si on entend ce mot au sens propre dont on vient de rappeler la définition. Puisqu'en effet l'acte-idée porte en son propre « subsister » l'exigence ontologique d'un antécédent, il serait contradictoire d'affirmer qu'il pût ne procéder de « rien ».

Voilà donc précisée l'économie de l'acte qui, « ex parte subjecti », constitue le fondement par excellence de l'entité mathématique ; et qui, par le fait même, est la norme en quelque sorte immanente de tout autre acte ordonné à saisir une telle entité, en particulier de l' « option » en tant que celle-ci est un acte exercé.

● L' « option » qui, au point de vue épistémologique, « décide » du statut de l'entité mathématique, est vraie ou fausse, selon qu'elle conduit à attribuer à une telle entité, le caractère « ouvert » ou le caractère « fermé ».

La portée de l' « option » se trouve dès lors manifestée, radicalement en vertu de la lumière de l'être, et immédiatement dans la transparence de l'acte-idée. Procédons à le montrer.

L' « option » a pour objet les deux manières de concevoir le rapport entre la forme « triviale » et la forme mathématique de la même notion, ou bien les deux manières de concevoir le rapport entre la mathématique et la réalité ; ou, enfin, équiva-

(88) La manière la plus simple de caractériser adéquatement la « création » est la suivante. La création est une opération absolue, en ce sens qu'elle s'exerce indépendamment de toute « matière » qui lui serait extrinsèque. Il s'ensuit que le terme de cette opération est produit exclusivement par elle ; ou, en d'autres termes, « à partir de rien ».

lemment, l' « option » consiste dans le fait d'attribuer aux entités mathématiques, soit le caractère « ouvert », soit le caractère « fermé ».

Or, en l'instant où l'entité mathématique est, en un sens, créée, qu'en est-il de cette alternative que l'acte d'opter consiste à décider ? La réponse est évidente. Créée en tant qu'elle est *un ordre* sur lequel débouche l'actuation terminale, l'entité mathématique est co-essentiellement dépendante d'un antécédent en raison de l'actuation-origine. Elle est donc référée, ontologiquement puisque dans le fait même de subsister, à cet antécédent. Elle est donc, par définition, « ouverte » ; et cela en vertu même des conditions de sa genèse, lesquelles demeurent celles de son subsister.

D'où la conséquence : l' « option » qui entraîne d'attribuer aux entités de la mathématique le caractère « fermé » est fausse, c'est l' « option » qui entraîne d'attribuer aux entités de la mathématique le caractère « ouvert », c'est celle-là qui est conforme à la vérité. Car, tout simplement, la vérité c'est « ce qui est ». La vérité concernant une manière d'être consiste à exprimer cette manière d'être telle qu'elle est.

On ne pourrait donc refuser l' « option » que spécifie l' « ouvert », qu'en montrant la non validité de l'argument qui en établit la vérité. Et comme cet argument consiste dans le fait d'attribuer à l'entité mathématique le caractère qu'elle a en l'instant où elle est créée, la preuve d'invalidité ne pourrait être faite qu'en infirmant soit l'une soit l'autre des deux prémisses, c'est-à-dire soit en attribuant à l'entité déjà créée le caractère qui est contraire à celui de l'entité en train d'être créée, soit en tenant que l'entité mathématique est créée en ayant le caractère « fermé ».

Le premier constituerait le moyen le plus radical et partant le plus assuré, si on se proposait de concevoir intégralement tout l'objet de la mathématique comme étant du « catalogué » ([13], 58) ! Inutile d'insister.

Le second, savoir que ce qui est nécessairement « ouvert » en vertu de l'actuation-origine serait cependant « fermé » au titre d'aboutissant de l'actuation terminale, exigerait qu'on disjoignît l'une de l'autre ces deux actuations. Or leur concomitance ontologique est la condition même de l'unité d'ordre, et par conséquent de la réalité simple, qui est propre à l'acte-idée ; elle est donc également la condition sur laquelle est fondée la réalité de toute la mathématique, très particulièrement celle de la « mathématique vivante ».

● L' « option » qui concerne l'épistémologie de la mathématique ne fait que manifester, toutes choses égales d'ailleurs, l'option même qui concerne l'être.

Ainsi, on aboutit à une contradiction, celle-ci revêtant la forme précise d'une non consistance dans l'être, si on attribue aux entités mathématiques d'avoir le caractère « fermé ». Il est d'ailleurs évident, si on se place au point de vue de l'être, qu'il ne peut en être autrement. Poser, par un décret de l'esprit, l'acte-idée ayant été émis et donc a posteriori, que l'entité mathématique est coupée d'avec la réalité d'où cependant elle procède en vertu de l'acte-idée, c'est ipso facto rendre cette entité non consistante au point de vue de l'être.

Et, en retour, le fait que soit vraie l' « option » qui entraine d'attribuer aux entités de la mathématique le caractère « ouvert », et contradictoire au point de vue de l'être l' « option » qui entraîne d'attribuer aux entités de la mathématique le caractère « fermé », prouve que l' « option » dont l'expression précise ressortit au domaine mathématique est en réalité l'affleurement formel, relativement à un mode de l'être, de l' « option » primitive dont l'objet est soit le refus soit l'acceptation de l'être, et dont la conséquence est, soit d'enfermer l'esprit dans le narcissisme, soit de le laisser ouvert sur l'infini[87]. C'est cela que nous nous proposions de montrer, et qui de surcroît nous ramène à notre propos.

Il semblerait que nous sommes bien loin de l' « enseignement », que celui-ci soit traditionnel ou moderne. Mais il n'en est rien.

L'enfance, « petite » ou avancée, à qui la mathématique moderne est proposée, ne spécule pas, il est vrai, sur l' « option »

(87) Cette « option » est équivalente à celle qui concerne la « création ». L'homme étant créature, ne peut agir qu'à partir d'un donné antécédent lequel peut, génériquement, être appelé « matière ». Prétendre créer même cette « matière », c'est par le fait même prétendre créer *le tout*, et donc l'être même, de ce qu'en réalité on ne peut créer que relativement. Et prétendre créer l'être, c'est le refuser : en tant que précisément l'être constitue pour la créature, un « donné ». Ce refus est, en fait, virtuellement, sinon consciemment, impliqué en toute tentative de « création absolue ». On comprend ainsi pourquoi l'athéisme le plus radical se rencontre parmi les « créateurs ». Ils ne peuvent que « refuser » ou adorer.

entre l' « ouvert » et le « fermé » [88]. Montrer l'existence, analyser la nature et préciser la portée de cette option, exige de considérer l'activité mathématique comme constituant l'objet d'une démarche réflexive, et se trouve par conséquent exclu de l'exercice même de cette activité, aussi bien que de la communication qui peut en être faite par mode d'enseignement.

Mais on peut vivre une chose sans en prendre explicitement conscience, et même sans la conceptualiser. Ainsi en est-il de l'implication métaphysique qui est concomitante parce que, nous venons de le voir, sous-jacente à l' « option » concernant l'alternative « ouvert »-« fermé ». Il est fort probable que la distinction entre ces deux termes, ou entre deux termes respectivement équivalents, ne sera ni clairement conçue par les enseignants ni clairement exposée aux enseignés. Mais tous, enseignants et enseignés, *referont ensemble, en fait et sans le savoir,* l' « option » qui entraine d'attribuer aux entités de la mathématique le caractère « fermé », chaque fois qu'ils étudieront de concert l'un des chapitres dont la présentation et la rédaction sont inspirées par l'esprit de la « mathématique moderne ».

Une « option », suggérée et répétée, devient « habitude », et puis « habitus ». Les esprits « formés » de cette façon, « dès la petite enfance » et unilatéralement, contracteront un pli, en l'occurrence un « faux pli ». Le constructionnisme mental pourra les séduire, voire devenir pour eux une sorte de mystique de l'esprit ; mais ils n'en deviendront que plus allergiques à la perception de l'être, qu'ils auront été habituellement détournés de considérer. Or, comment retrouver Celui qui EST, si on a aliéné en soi-même le sens de l'être ? L' « option » que diffuse, par le truchement de l'enseignement, l'*esprit* de la « mathématique moderne », « option » *qui est déjà décidée* en faveur du caractère « fermé », cette « option » risque en fait d'hypothéquer l'option à « décider » par laquelle tout humain réalise sa propre destinée.

(88) On ne juge cependant pas que cette distinction soit trop subtile pour être enseignée en classe de 5e, dès là qu'elle concerne les ensembles eux-mêmes ([9], 200). Ceux que l'on suppose capables de comprendre l'acception technique de cette distinction, le seraient également de comprendre l'acception métaphysique que nous en proposons.

Nous ne saurions mieux conclure ces observations critiques qu'en répétant notre slogan : « A bas l'ensemblisme ; et, alors, vive Bourbaki ! »

Car nos réserves ne concernent ni la « mathématique moderne » comme telle, ni le perfectionnement propre qu'elle apporte ; mais bien *l'esprit*, et plus précisément *l'inspiration métaphysique* qui préside en fait au type d'axiomatisation qu'ont choisi les auteurs de la « nouvelle mathématique ».

Car, même à l'intérieur de l'univers qui est en propre celui de la mathématique, il est possible que « deux amours construisent deux cités » : l'amour de la vérité, que l'esprit doit découvrir dans les fondements qui lui en sont donnés ; l'amour de soi, dont l'esprit entend jouir en visant, absolument, à créer.

« Qui potest capere capiat. »

Liste bibliographique des documents auxquels il est renvoyé au cours de l'étude.

[1] Le Courrier de la Recherche pédagogique. N° 19, Juillet 1963 ; Institut pédagogique national, 29, rue d'Ulm, Paris 5e. — (Le colloque de Royaumont).
[2] Le Courrier de la Recherche pédagogique. N° 27, mars 1966.
[3] Le Courrier de la Recherche pédagogique. N° 31, juillet 1967.
[4] Le Courrier de la Recherche pédagogique. N° 33, mars 1968.
[5] Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique. n° 1 ; A.P.M.E.P., 89, rue d'Ulm, Paris 5e. — (La charte de Chambéry).
[6] Bibliothèque d'information sur l'enseignement mathématique. N° 3. — (Première étape vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires).
[7] Madame Touyarot. Vers une éducation mathématique moderne à l'école élémentaire. — Bulletin de la Société française de pédagogie. N° 165, juillet 1968.
[8] Mathématique en 6e. Expérimentation et nouveaux programmes. — Institut pédagogique national. 1969.
[9] Mathématiques. Collection Queysanne-Revuz. — Classes de 6e et de 5e. Paris, Nathan, 1969.
[10] Z. P. Dienes, E. W. Golding. Les premiers pas en mathématiques. — O.C.D.L., 65, rue Claude Bernard, Paris 5e.
[11] Z. P. Dienes. Comprendre la mathématique. — O.C.D.L.
[12] Lucienne Felix. L'aspect moderne des mathématiques. Paris, Blanchard, 1957.
[13] André Revuz. Mathématique moderne, Mathématique vivante. — O.C.D.L., 1968.
[14] Evariste Dupont. Apprentissage mathématique. — Société universitaire d'éditions et de librairie, 3, rue Palatine, Paris 6e.
[15] Louis Couffignal. L'utilisation des mathématiques. — Technique, Art, Science ; Revue de l'enseignement technique. N° 217, mars 1968 ; 61, avenue du Président Wilson, 94-Cachan.

Nous signalons ici les documents ayant un caractère typique. On trouvera, en [13] et en [14], une bibliographie étendue.

Nous recommandons spécialement : [1], [5], [13], [14], [15]. Et nous précisons : que [14] exige d'entrer dans la technique de la mathématique moderne ; que [13] ne concerne pas l'enseignement du premier degré (note, p. 76).

Table analytique des matières

DOIN, Editeurs, 8, place de l'Odéon, Paris-6e
Dépôt légal : 1er trimestre 1972
Les Presses Bretonnes, Saint-Brieuc